

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Відкритий міжнародний університет розвитку людини «Україна»
Інженерно-технологічний інститут

Березін Л.М., Кошель С.О., Кошель Г.В., Малишев В.В.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА
Частина 1
Статика, кінематика

Навчальний посібник

Київ
Університет "Україна"
2021

УДК 531/534 (075.8)
Б 48

*Рекомендовано до друку
Науково-методичною радою Університету «Україна»
(протокол № 3 від 16.02.2021 р.)*

Авторський колектив:

Березін Леонід Миколайович – канд. техн. наук, доцент;

Кошель Сергій Олександрович – канд. техн. наук, доцент;

Кошель Ганна Володимирівна – канд. техн. наук, доцент;

Малишев Віктор Володимирович – д-р техн. наук, проф., заслуж.
діяч науки і техн. України.

Рецензенти:

Сукач М. К. – доктор технічних наук, професор, професор
кафедри будівельних машин Київського національного університету
будівництва та архітектури.

Якимчук М. В. – доктор технічних наук, доцент, професор
кафедри мехатроніки та пакувальної техніки Національного
університету харчових технологій.

Березін Л.М.

Б48 Теоретична механіка. Частина 1. Статика, кінематика: навч.
посіб. / Л.М. Березін та ін. – К.: Університет "Україна", 2021. –
142 с.

ISBN 978-966-388-611-4

Навчальний посібник складається з двох частин теоретичних відомостей
основних тем курсу «Теоретична механіка». До першої частини надходять
розділи статика та кінематика, до другої – динаміка.

Навчальний посібник може бути використаний для загальнофахової
підготовки студентів вищих технічних навчальних закладів усіх форм навчання,
корисний у формі довідково-методичного посібника для магістрів, аспірантів,
інженерно-технічних працівників при самостійному вивченні основ або
поглибленні знань з «Теоретичної механіки».

Для студентів ВЗО галузі знань 27 «Транспорт», спеціальності 274
«Автомобільний транспорт», галузі знань 13 «Механічна інженерія»,
спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» та 131 «Прикладна механіка».

УДК 531/534 (075.8)

ISBN 978-966-388-611-4

© Березін Л.М. та ін., 2021

DOI: <https://doi.org/10.36994/978-966-388-611-4-2021-142>

© Університет «Україна», 2021

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу, основою ряду технічних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, будівельної механіки, теорії автоматичного керування, ряду курсів з машино- і приладобудування, автомобілебудування тощо.

В посібнику "Теоретична механіка" розкривається зміст ключових тем у відповідності до вимог програми курсу технічних наук для студентів спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування» галузі знань 13 «Механічна інженерія» та спеціальності 274 «Автомобільний транспорт» галузі знань 27 «Транспорт». При цьому допускається можливість використання видання студентами технічних спеціальностей та різних форм навчання.

В посібнику розглянуто питання дисципліни, які відповідають вимогам до знань та вмінь з даного курсу, що пред'являються студентам машинобудівних та технологічних спеціальностей з корегуванням в напрямку збільшення обсягу самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник складається з двох частин теоретичних відомостей основних тем курсу «Теоретична механіка». До першої частини надходять розділи статика та кінематика, до другої – динаміка. Частина перша складається з двох розділів та 12 глав. Відносна стислість матеріалу зумовлена раціональним способом подачі теоретичного матеріалу та підбору прикладів для пояснення основних тем. Застосування теорем та методів Теоретичної механіки має прикладний характер та супроводжуються розв'язком багатьох задач.

Для зручності вивчення та повторення курсу найважливіші терміни винесені в предметний покажчик.

При підготовці даного видання авторами переглянуто весь текст, враховані зауваження та внесені необхідні уточнення в термінології курсу українською мовою.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
ЗМІСТ	4
Розділ 1. СТАТИКА	7
1.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА СТАТИКИ	7
1.1.1. Предмет науки. Три частини теоретичної механіки.....	7
1.1.2. Основні поняття статички.....	7
1.1.3. Основні аксіоми статички (закони механіки)	9
1.1.4. Основні типи механічних в'язей та їх реакції.....	10
Контрольні запитання	14
1.2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ.....	15
1.2.1. Векторний метод додавання сил	15
1.2.2. Проекції сили на вісь та площину.....	16
1.2.3. Аналітичний метод додавання сил (метод проєкцій).....	18
1.2.4. Рівновага системи збіжних сил	20
Контрольні запитання	21
1.3. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО СПІЛЬНОГО ЦЕНТРУ	22
1.3.1. Система двох паралельних сил	22
1.3.2. Еквівалентність пар сил, що розташовані в одній площині та в просторі.	23
1.3.3. Додавання просторової системи пар сил.....	26
1.3.4. Умови рівноваги системи пар сил.....	27
1.3.5. Момент сили відносно точки.....	29
1.3.6. Зведення довільної системи сил до спільного центру. Основна теорема статички	31
Контрольні запитання	33
1.4. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ. ТЕРТЯ.....	34
1.4.1. Додавання плоскої системи сил	34
1.4.2. Рівновага плоскої системи сил	36
1.4.3. Рівновага системи твердих тіл.....	39
1.4.4. Рівновага сил при наявності тертя. Сухе тертя ковзання в спокою	41
1.4.5. Тертя ковзання в русі. Кут та конус тертя.....	42
1.4.6. Тертя кочення.....	43
Контрольні запитання	45
1.5. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ.....	46

1.5.1. Момент сили відносно вісі.....	46
1.5.2. Визначення головного вектора та головного моменту довільної системи сил	47
1.5.3. Рівнодійна довільної системи сил.....	49
1.5.4. Загальний випадок зведення довільної системи сил	51
1.5.5. Рівновага просторової системи сил	54
1.5.6. Окремі випадки рівноваги невільного твердого тіла	57
Контрольні запитання	60
1.6. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	61
1.6.1. Центр паралельних сил	61
1.6.2. Поняття та загальні формули координат центру ваги.....	62
1.6.3. Центр ваги симетричного тіла. Визначення центрів ваги деяких однорідних тіл.....	64
Контрольні запитання	70
Розділ 2. КІНЕМАТИКА.....	71
2.1. ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ.....	71
2.1.1. Предмет кінематики. Основні поняття.....	71
2.1.2. Швидкість та прискорення точки при векторному способі задання її руху.....	72
2.1.3. Траєкторія та швидкість точки при координатному способі задання її руху.....	74
2.1.4. Прискорення точки при координатному способі завдання її руху	77
2.1.5. Закон руху та швидкість точки за природнім способом задання руху	80
2.1.6. Дотичне та нормальне прискорення точки	83
Контрольні запитання	86
2.2. ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТА ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ.....	87
2.2.1. Поступальний рух твердого тіла	87
2.2.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі	88
2.2.3. Швидкість та прискорення точок обертального руху твердого тіла	90
2.2.4. Векторні формули швидкості та прискорень точок тіла при його обертальному русі.....	91
2.2.5. Передача обертального руху	94
Контрольні запитання	96
2.3. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ.....	98

2.3.1. Поняття відносного, переносного та абсолютного рухів точки.	98
2.3.2. Швидкості та прискорення точки в складному русі точки.....	99
2.3.3. Додавання швидкостей при складному русі точки	101
2.3.4. Додавання прискорень точки. Теорема Коріоліса.....	103
Контрольні запитання	106
2.4. ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	107
2.4.1. Складний плоский рух тіла.....	107
2.4.2. Розкладання плоского руху тіла на поступальний та обертальний рухи.....	109
2.4.3. Швидкості точок плоскої фігури.....	110
2.4.4. Миттєвий центр швидкостей.....	111
2.4.5. Прискорення точок твердого тіла при його плоско-паралельному русі	115
2.4.6. Миттєвий центр прискорень.....	118
Контрольні запитання	120
2.5. СФЕРИЧНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	120
2.5.1. Основні поняття та рівняння сферичного руху тіла.....	120
2.5.2. Кутова швидкість та кутове прискорення тіла при його сферичному русі	122
2.5.3. Швидкості точок твердого тіла при його сферичному русі.....	124
2.5.4. Прискорення точок твердого тіла при його сферичному русі..	126
Контрольні запитання	128
2.6. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА	129
2.6.1. Додавання поступальних рухів тіла.....	129
2.6.2. Додавання двох обертальних рухів тіла	130
2.6.3. Додавання поступального та обертального рухів тіла	133
2.6.4. Загальний випадок руху твердого тіла	135
2.6.5. Основні рівняння кінематики та статички твердого тіла.....	137
Контрольні запитання	139
Список літератури	140

Розділ 1. СТАТИКА

1.1. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА СТАТИКИ

1.1.1. Предмет науки. Три частини теоретичної механіки

Теоретична механіка – наука про загальні закони механічного руху та механічної взаємодії матеріальних тіл. Допустимі також назви "загальна механіка" та "класична механіка". Теоретична механіка - одна з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу. В основі теоретичної механіки - закони, що встановлені теоретично та підтверджені практикою.

Зв'язок історії розвитку техніки та механіки простежується від важеля та блоку найпростіших механізмів до космічних апаратів та міжпланетних станцій.

Розрізняють класичну (Галілея-Ньютона), релятивістську (А. Ейнштейна) та квантову (Н.Бора) механіки. Теоретична механіка є класичною.

Теоретична механіка складається з трьох частин:

а) статика – розділ про сили та умови рівноваги матеріальних тіл під дією сил;

б) кінематика – розділ в якому вивчають рух матеріальних тіл з геометричної сторони, тобто без урахування діючих сил;

в) динаміка - розділ в якому вивчають рух матеріальних тіл під дією прикладених сил.

Вивчення теоретичної механіки базується на знаннях з математики та фізики. Відомості з статички використовують при вивченні дисципліни опір матеріалів, кінематики та динаміки – дисципліни теорія механізмів та машин, надалі знання з теоретичної механіки, опору матеріалів та теорії механізмів та машин – в дисциплінах деталі машин, підйомно-транспортні пристрої та в профільюючих дисциплінах за спеціальностями.

1.1.2. Основні поняття статички

Статика – розділ, в якому вивчають рівновагу сил, що прикладені до твердого тіла.

В статистиці розглядають дві основні задачі:

а) додавання сил або зведення системи сил, що діють на тіло, до найпростішого виду;

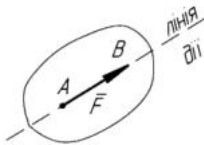
б) визначення умов рівноваги сил, що діють на тіло.

Матеріальна точка - тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна нехтувати.

Системою матеріальних точок або механічною системою називають сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємозв'язані, наприклад, сонячна система, кривошипно-шатунний механізм.

Абсолютно твердим тілом є незмінна матеріальна система, у якій відстань між двома будь-якими точками залишається сталою (надалі називаємо тверде тіло).

Сила – векторна величина, яка є мірою механічної взаємодії тіл, що визначає інтенсивність та напрямок цієї взаємодії. Три фактори визначають силу:



а) модуль (числове значення) F ;

б) лінія дії (напрямок) AB ;

в) точка прикладання A .

Рис.1

Використовують три види рівності сил:

а) за модулем (позначають $F_1 = F_2$);

б) векторна рівність, тобто за модулем та напрямком (позначають $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$);

в) еквівалентна рівність (позначають $\vec{F}_1 \equiv \vec{F}_2$).

Системою сил називають сукупність сил, що прикладені до тіла.

Зрівноваженою є система сил, яка прикладена до тіла, що перебуває в рівновазі.

Дві системи сил називають еквівалентними, якщо, не порушуючи стану твердого тіла, одну з них можна замінити іншою.

Рівнодійною системи сил є сила, яка еквівалентна даній системі сил.

Система сил, які діють на тверде тіло, може складатися як із зосереджених (ізолюваних, прикладених до точки) сил, так і з розподілених (рис.2):

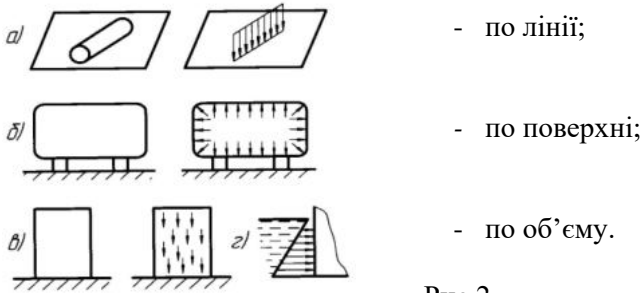


Рис.2

Розподілені сили задаються їх інтенсивностями в Н/м, Н/м² та Н/м³ відповідно.

В деяких випадках сили можуть бути нерівномірно розподіленими (2).

Розглядаємо плоску систему, яка розподілена по лінії з інтенсивністю q в Н/м (рис.3):

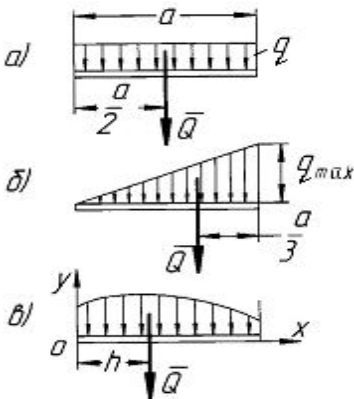


Рис.3

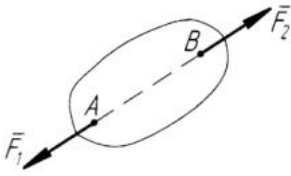
а) сила, яка рівномірно розподілена - рівнодійна $Q = q \cdot a$;

б) сила, яка розподілена за лінійним законом - рівнодійна $Q = \frac{1}{2} q_{\max} \cdot a$;

в) сила, яка розподілена за вільним законом: рівнодійна $Q = \int_0^a q \cdot dx$ - площа під кривою.

1.1.3. Основні аксіоми статички (закони механіки)

Аксіома про умову рівноваги двох сил: дві сили, що прикладені до твердого тіла, взаємно урівноважуються (еквівалентні нулю), якщо сили рівні за модулем та спрямовані вздовж однієї прямої в протилежних напрямках.



$$F_1 = F_2 ;$$

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Рис.4

Аксиома приєднання та відкинення системи зрівноважених сил: дія системи сил на тверде тіло не зміниться, якщо до неї приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

При зрівноважених $\vec{Q}_1 = -\vec{Q}_2$ (рис.5) маємо

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \equiv (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{Q}_1, \vec{Q}_2) .$$

Наслідок аксіоми: сила – вектор ковзний, тобто вектор сили можна переносити в будь-яку точку вздовж лінії її дії (рис.6).

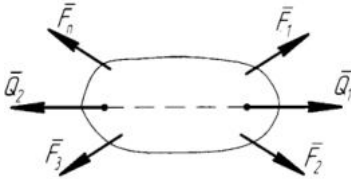


Рис.5

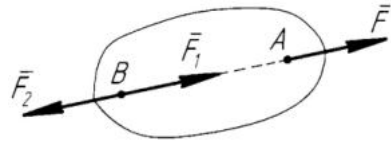
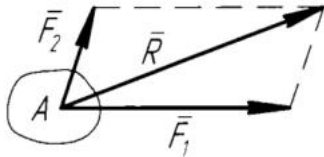


Рис.6

При $F_1 = F_2 = F$; $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ маємо $\vec{F} \equiv (\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2) \equiv \vec{F}_1$.

Закон (правило) про паралелограм сил: рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки, за модулем та напрямком визначається діагоналлю паралелограма, що побудований на векторах цих сил.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Рис.7

Наслідок аксіоми - теорема про збіжність трьох сил: якщо три сили зрівноважені, то їх лінії дії розташовані в одній площині і перетинаються в одній точці.

Закон рівності дії та протидії: кожній дії відповідає рівна за модулем та протилежно спрямована протидія.

1.1.4. Основні типи механічних в'язей та їх реакції

Тверде тіло, яке може одержати будь-яке переміщення у просторі, називається вільним. Приклади: снаряд, літак, супутник у польоті

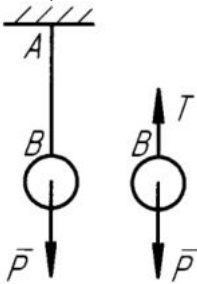
(опором повітря нехтуємо) тощо.

Тверде тіло називається невільним, якщо на його рух накладені деякі обмеження. Приклади: стіл на підлозі, двері на петлях, деталь машини, вантаж на тросі.

Будь-яке тіло, що обмежує свободу переміщення даного тіла, називається відносно нього механічною в'язю.

Сила, з якою в'язь діє на дане тверде тіло, називається реакцією механічної в'язі.

Сили поділяють на активні, що задаються, та пасивні сили (реакції в'язей).



На рис.8 вага P - активна сила, T - реакція в'язі, якою є мотузка.

Додатковою (5-ою аксіомою) є принцип звільнення від механічних в'язей: механічний стан твердого тіла не зміниться, якщо звільнити його від в'язей, замінивши їх дію відповідними реакціями в'язей.

Перелічимо основні типи в'язей.

1. Гладка поверхня. Реакція \bar{N} спрямовується по нормалі від поверхні з точки дотику. Якщо поверхні є плоскими, то реакції \bar{N}_A та \bar{N}_B спрямовують перпендикулярно від поверхні. Якщо одна з поверхонь є точкою дотику, наприклад точка C , то реакцію \bar{N}_C спрямовують по нормалі до іншої поверхні.

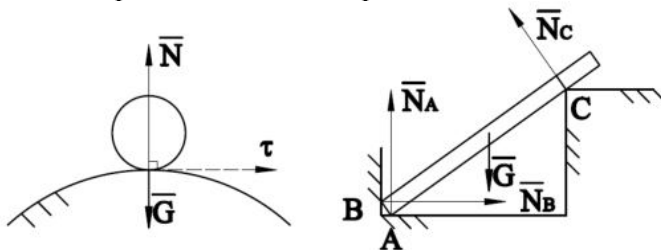


Рис.9

2. Гнучкі в'язі (нитки, троси, приводні ланцюги, паси тощо). Реакцію гнучкої в'язі \bar{T} спрямовують вздовж в'язі в напрямку від

даного тіла і називають натягом.

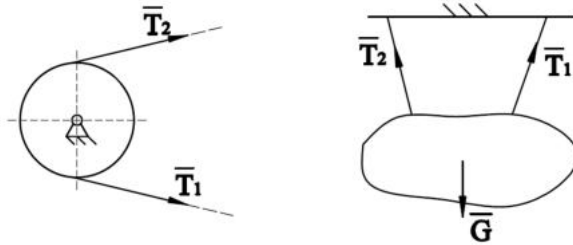


Рис.10

3. Шарніри:

а) циліндричний шарнір з нерухою опорою – на рис. 11, б (опорну реакцію \vec{R}_O при розв'язуванні задач замінюють двома взаємно перпендикулярними складовими \vec{X}_O та \vec{Y}_O);

б) циліндричний шарнір з рухою опорою - на рис. 11, в (напрямки \vec{Y}_O або \vec{R}_O , які перпендикулярні до опорної поверхні).

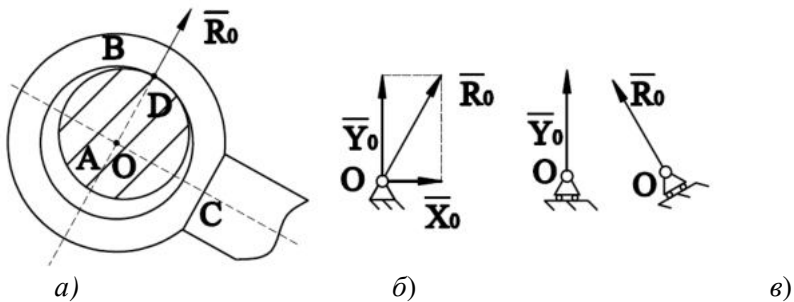


Рис.11

в) сферичний шарнір – на рис.12 (при розв'язуванні задач реакцію \vec{R}_O замінюють трьома взаємно перпендикулярними складовими \vec{X}_O , \vec{Y}_O та \vec{Z}_O).

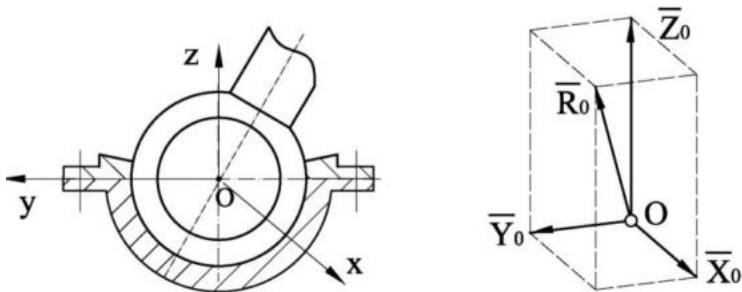


Рис.12

4. Невагомі стержні – на рис.13 (реакції \bar{R}_A та \bar{R}_B невагомих прямолінійних стержнів AC та BC спрямовують вздовж осей стержнів. У випадку криволінійного стержня AB реакцію \bar{R}_B спрямовуємо вздовж прямої AB , яка з'єднує шарніри A та B).

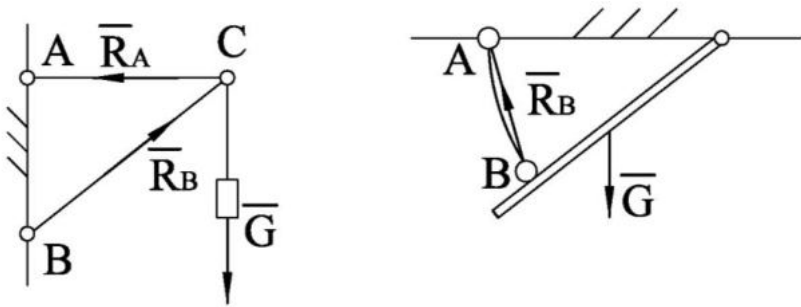


Рис.13

5. Защемлення (або консольне закріплення):

а) жорстке A - на рис.14,а (замінюють складовими реакціями \bar{X}_A та \bar{Y}_A , які паралельні координатним осям та реактивним моментом M_A ; напрямки \bar{X}_A , \bar{Y}_A та M_A задаються довільно);

б) ковзне B - на рис.14, б (замінюють реакцією \bar{R}_B , яка перпендикулярна до напрямних та реактивним моментом M_B ; напрямки \bar{R}_B та M_B задаються довільно).

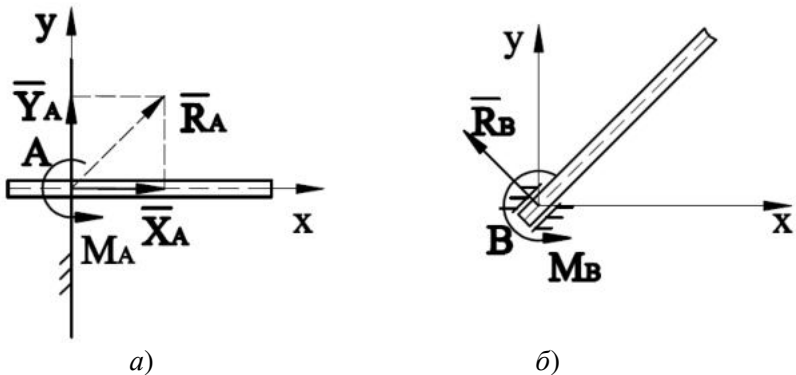


Рис.14

6. Підшипник A та під'ятник B - на рис.15, a (при розв'язуванні задач дію підшипника A замінюють двома взаємно перпендикулярними складовими \bar{X}_A та \bar{Y}_A , під'ятника B - взаємно перпендикулярними \bar{X}_B та \bar{Y}_B та складовою \bar{Z}_B опорної поверхні).

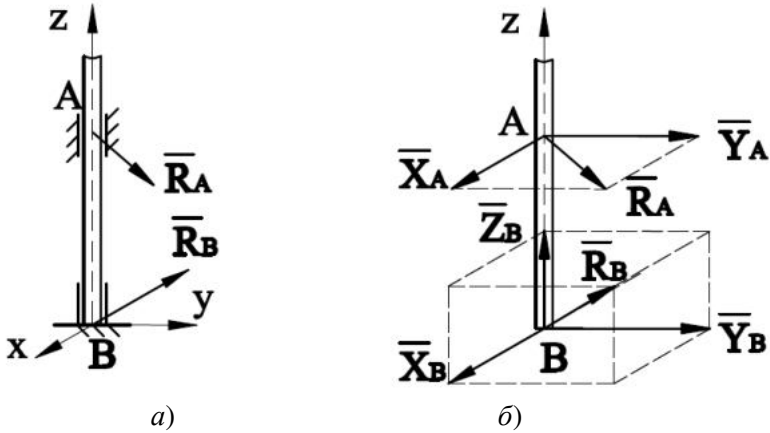


Рис.15

Контрольні запитання

1. Дати визначення Теоретичної механіки. Три її розділи.
2. Які задачі розглядають в розділі Статика?
3. Перелічити три види рівності сил.
4. Які системи сил називають зрівноваженими, еквівалентними?
5. Дати визначення рівнодійної системи сил.
6. Назвати основні аксіоми статички.
7. Як називають закон : рівнодійна двох сил, що прикладені до однієї точки, за модулем та напрямком визначається діагоналлю паралелограма, що побудований на векторах цих сил?
8. Дати визначення механічної в'язі та її реакції.
9. Назвати механічні в'язі, які замінюють однією, двома та трьома реакціями.

1.2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

Система сил називається збіжною, якщо лінії дії сил перетинаються в одній точці.

1.2.1. Векторний метод додавання сил

Додавання сил – визначення їх рівнодійної.

Додавання двох сил:

- а) за законом паралелограма сил (рис.1);
- б) за правилом силового трикутника (рис.2);

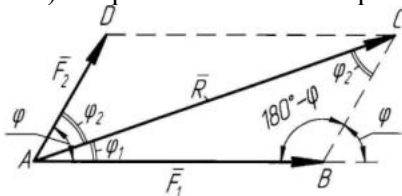


Рис.1

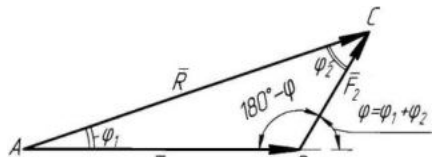


Рис.2

Модуль рівнодійної \bar{R} визначають за теоремою косинусів

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \varphi}, \quad (1)$$

а напрямок - за теоремою синусів

$$\frac{R}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{F_1}{\sin \varphi_2} = \frac{F_2}{\sin \varphi_1}. \quad (2)$$

Додавання трьох сил (рис.3), що не лежать в одній площині – за правилом силового паралелепіпеда: рівнодійна трьох збіжних сил, що не лежать в одній площині, за модулем та напрямком визначається діагоналлю паралелепіпеда, який побудований на векторах цих сил, тобто

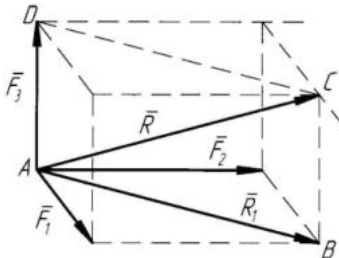


Рис.3

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 \\ \bar{R} = \bar{R}_1 + \bar{F}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$

Додавання чотирьох та більше сил (рис.4) – за правилом силового багатокутника: рівнодійна системи збіжних сил за модулем та напрямком визначається вектором ламаної лінії, сторонами якої є вектори даних сил, тобто

$$\left. \begin{aligned} \overline{AC} &= \overline{F_1} + \overline{F_2} \\ \overline{AD} &= \overline{AC} + \overline{F_3} \\ \overline{R} &= \overline{AE} = \overline{AD} + \overline{F_4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4}$$

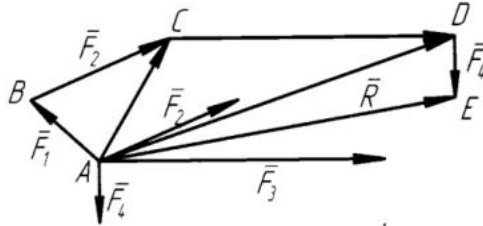


Рис.4

або в загальному випадку $\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{F_k}$. (3)

1.2.2. Проекції сили на вісь та площину

Проекція сили на вісь – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між додатним напрямком осі і вектором сили \overline{F}

$$F_x = X = F \cos \alpha, F_y = Y = F \cos \beta, \quad (4)$$

де $\alpha = (\overline{F}, x)$, $\beta = (\overline{F}, y)$ - кути, які утворені вектором сили \overline{F} та додатними напрямками осей x та y .

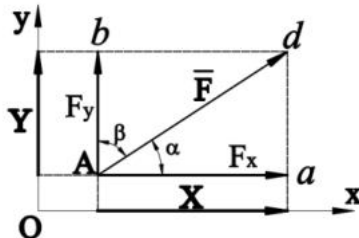


Рис.5

Окремі випадки:

а) проекція сили \vec{F} додатна (рис.6. а) при $X = F \cos \alpha > 0$, якщо $\angle \alpha < 90^\circ$;

б) проекція сили \vec{F} дорівнює нулю (рис.6. б) при $X = F \cos 90^\circ = 0$, якщо $\angle \alpha = 90^\circ$, тобто лінія дії сили \vec{F} перпендикулярна до вісі x ;

в) проекція сили \vec{F} від'ємна (рис.6. в) при $X = F \cos \alpha = -F \cos \beta$, якщо $\angle \alpha > 90^\circ$, де β - гострий кут між лінією дії сили \vec{F} і віссю x .

г) проекція сили \vec{F} дорівнює модулю самої сили при $X = F$ при $\angle \alpha = 0$ або $X = -F$ при $\angle \alpha = 180^\circ$.

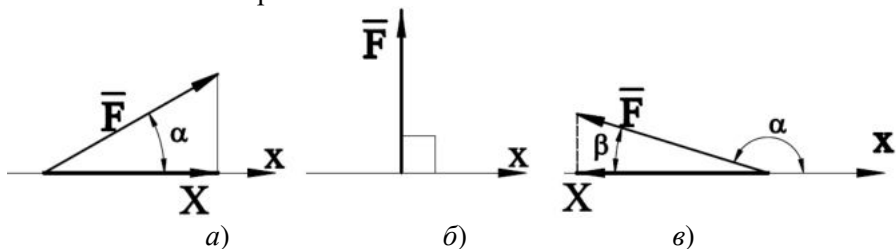


Рис.6

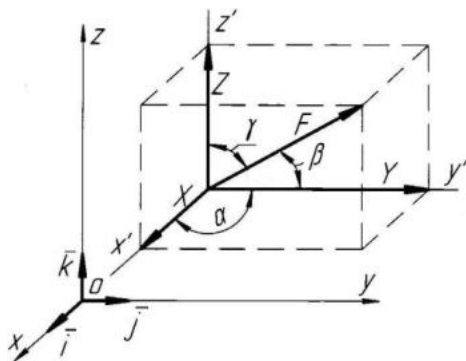


Рис.7

Проекції сили, що розміщена в просторі та з початком в центрі координат, на координатні вісі визначаються за формулами:

$$F_x = X = F \cos \alpha ; F_y = Y = F \cos \beta ; F_z = Z = F \cos \gamma . \quad (5)$$

Модуль сили, враховуючи перпендикулярність проекцій:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (6)$$

а, напрямком - за напрямними косинусами

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{X}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} = \frac{Y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{Z}{F}. \quad (7)$$

Вектор сили можна представляти за формулою розкладання її по координатним осям

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}, \quad (8)$$

де \vec{i} , \vec{j} та \vec{k} - орти.

Для визначення проєкцій сили, що розміщена в просторі (рис.9) використовують метод подвійного проєктування: щоб визначити проєкцію сили на вісь, необхідно спроєктувати силу на площину, в якій розташована ця вісь, а потім проєкцію на площину спроєктувати на вісь, тобто

$$F_x = X = Oa = np_x F_{xy} = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta; \quad (9)$$

$$F_y = Y = Ob = np_y F_{xy} = F_{xy} \sin \beta = F \cos \alpha \sin \beta.$$

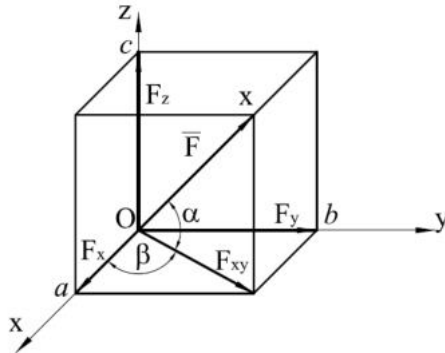


Рис.8

1.2.3. Аналітичний метод додавання сил (метод проєкцій)

Використовуємо теорему про проєкцію рівнодійної: проєкція рівнодійної системи сил на будь-яку вісь дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій сил системи.

$$\text{Дано: } \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3.$$

Доказ:

$$\left. \begin{array}{l} F_{1x} = ab; F_{2x} = bc \\ F_{3x} = -cd; F_{4x} = ad \end{array} \right\} \Rightarrow ad = ab + bc - cd; R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = \sum_{k=1}^3 F_{kx}$$

Складання сил методом проєкцій. Якщо діє просторова система \vec{i} сил, то рівнодійна $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$.

Проекції на вісі у відповідності до теореми про проєкції рівнодійної:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^n F_{kx};$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \sum_{k=1}^n F_{ky}; \quad (10)$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n F_{kz}.$$

Модуль та напрямок рівнодійної -

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2}; \quad (11)$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum F_{kx}}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R} = \frac{\sum F_{ky}}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R} = \frac{\sum F_{kz}}{R}.$$

Перелічимо окремі випадки:

a) плоска система збіжних сил (рис.9)

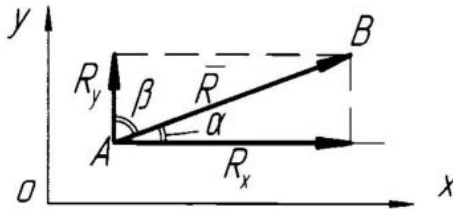


Рис.9

Модуль та напрямок визначаються за формулами

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R} = \frac{\sum F_{kx}}{R}; \quad ; \quad (12)$$

б) сили, що діють паралельно до однієї прямої (рис.10) за модулем:

$$R_x = \sum F_{kx}; R = |R_x|. \quad (13)$$



Рис.10

1.2.4. Рівновага системи збіжних сил

Постановкою задачі є визначення умов, за якими система збіжних сил буде в рівновазі.

Нехай: $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ - збіжна система сил, яка знаходиться в рівновазі. Тоді система сил $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_{n-1} = \bar{R}_1$; $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \equiv (\bar{R}_1, \bar{F}_n)$ - також у рівновазі.

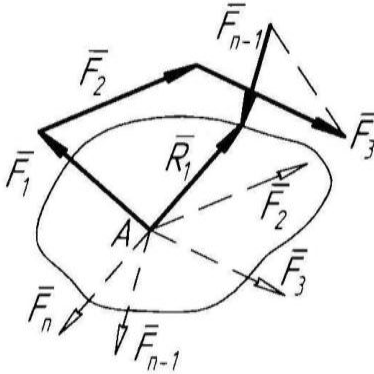


Рис.11

У відповідності до 1-ої аксіоми

$$\bar{R}_1 = -\bar{F}_n,$$

звідки $\bar{R}_1 + \bar{F}_n = 0$.

Враховуючи, що $\bar{R}_1 + \bar{F}_n = \bar{R}$,

маємо $\bar{R} = 0$.

Таким чином, задача визначення умов рівноваги системи збіжних сил зводиться до виявлення таких умов, за якими рівнодійна цієї системи сил дорівнює нулю.

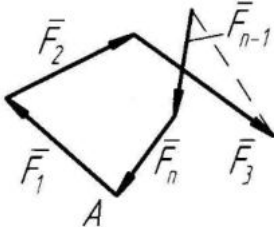


Рис.12

Умова рівноваги у векторній формі (рис.12) представляється як:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \\ \bar{R} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0. \quad (14)$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб векторна сума цих сил дорівнювала нулю. При цьому силовий багатокутник, який утворений векторами сил системи, буде замкнутим.

Умова рівноваги в аналітичній формі:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} = 0$$

можлива при:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} &= \sum Z_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на координатні вісі дорівнювали нулю.

Перелічимо окремі випадки:

а) для плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

б) сили діють вздовж однієї прямої:

$$\sum F_{kx} = \sum X_k = 0. \quad (17)$$

Контрольні запитання

1. Яка система сил називається збіжною?
2. Перелічити методи додавання сил.
3. В чому полягає правило силового трикутника та багатокутника?
4. Поняття проекції сили на вісь та площину.
5. Записати формули для визначення модуля та напрямку рівнодійної для плоскої та просторової системи сил.
6. Сформулювати теорему про проекцію рівнодійної системи сил.
7. Записати умову рівноваги збіжної системи сил в векторній та координатній формах.

1.3. ТЕОРІЯ ПАР СИЛ. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО СПІЛЬНОГО ЦЕНТРУ

1.3.1. Система двох паралельних сил

Розглядаємо додавання двох паралельних сил, що спрямовані в одному напрямку (рис.1).

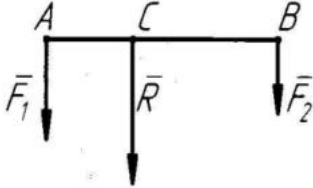


Рис.1

З фізики відомо, що $R = F_1 + F_2$

та $\frac{F_2}{BC} = \frac{F_1}{AC} = \frac{R}{AB}$.

Таким чином, рівнодійна двох паралельних сил, що спрямовані в одному напрямку, спрямовується в тому ж напрямку; її модуль дорівнює сумі модулів складових сил, а лінія дії розділяє відстань між даними силами внутрішньо на частини, що обернено пропорційні складовим системам.

У випадку двох антипаралельних сил – на рис.2:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &> F_2; \\ \bar{F}_1 &\equiv (\bar{F}_2', \bar{R}); \\ \bar{F}_2' &= -\bar{F}_2; \end{aligned} \right\}$$

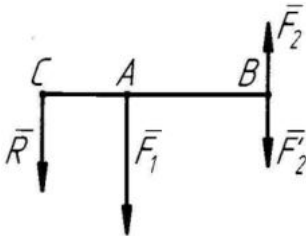


Рис.2

Рівнодійна $\bar{R} \equiv (\bar{F}_1, \bar{F}_2) \equiv (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{R})$,

модуль $F_1 = R + F_2' \Rightarrow R = F_1 - F_2$,

лінія дії $\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}$.

Отже, рівнодійна двох антипаралельних сил спрямовується в напрямку більшої сили; її модуль дорівнює різниці модулів складових сил, а лінія дії розділяє відстань між даними силами зовнішньо на частини, що обернено пропорційні складовим системам.

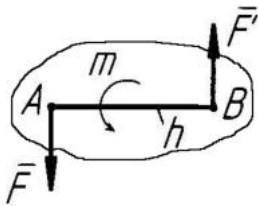


Рис.3

Парою сил називається система двох рівних за модулем антипаралельних сил (рис.3).

Рівнодійна пари сил дорівнює нулю, тобто:

$$R = F - F' = 0.$$

Ефект дії пари сил характеризується її моментом, як алгебраїчної величини:

$$M = \pm F \cdot h,$$

де h - плече пари сил - найкоротша відстань між лініями дії пари сил.

Знак моменту пари сил як алгебраїчної величини визначається за наступним правилом: при обертанні тіла проти ходу годинникової стрілки момент пари сил приймають додатним, якщо за ходом – від'ємним.

1.3.2. Еквівалентність пар сил, що розташовані в одній площині та в просторі.

Еквівалентність пар сил, що розміщені в площині виражається наступною теоремою: пари сил, що розташовані в одній площині еквівалентні, якщо їх моменти рівні за модулем і однаково спрямовані.

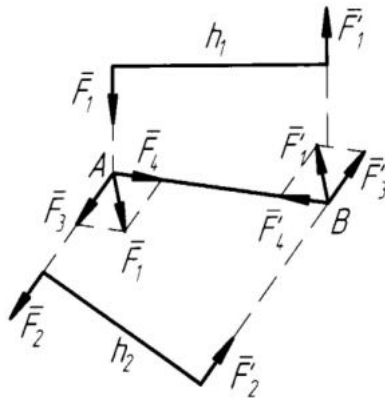


Рис. 4

Дано: $F_1 \cdot h_1 = F_2 \cdot h_2.$

Довести: $(\vec{F}_1, \vec{F}_1') \equiv (\vec{F}_2, \vec{F}_2').$

Доказ.

Використовуємо рис.4.

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_3, \bar{F}_4, \bar{F}_3', \bar{F}_4') \equiv (\bar{F}_3, \bar{F}_3').$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cdot h_1 &= F_3 \cdot h_2; \\ F_1 \cdot h_1 &= F_2 \cdot h_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_3 \cdot h_2 = F_2 \cdot h_2 \Rightarrow F_3 = F_2.$$

Тоді $(\bar{F}_2, \bar{F}_2') \equiv (\bar{F}_3, \bar{F}_3') \Rightarrow (\bar{F}_1, \bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}_2')$.

Наслідки з теореми виражають наступні властивості пари сил:

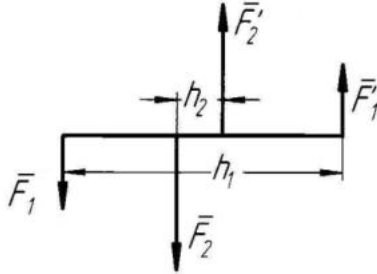


Рис.5

а) не змінюючи дії пари на тверде тіло, цю пару можна як завгодно переносити у площині її дії;

б) дія пари сил на тверде тіло не зміниться, якщо змінювати плече пари та модуль сил таким чином, щоб момент пари був сталим;

в) всі пари сил даної плоскої системи пар можливо привести до одного плеча.

Перенесення пари в іншу площину у відповідності до теореми: дану пару, не змінюючи її дії на тіло, можна переносити в будь-яку площину, що паралельна площині дії цієї пари.

Припускаємо, що A_1B_1 та A_2B_2 рівні та паралельні.

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_1 &= \bar{F}_3 + \bar{F}_2; \\ \bar{F}_1' &= \bar{F}_3' + \bar{F}_2' \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2; \\ F_1' &= F_3' - F_2' \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{F_1}{A_2O} &= \frac{F_2}{OA_1} = \frac{F_3}{A_1A_2}; \\ \frac{F_1'}{A_2O} &= \frac{F_2'}{OA_1} = \frac{F_3'}{A_1A_2} \end{aligned} \right\}$$

$$A_1A_2 = 2A_2O = 2OA_1;$$

$$F_3 = 2F_1 = 2F_2 = F_3'.$$

Таким чином, $(\bar{F}_1, \bar{F}_1') \equiv (\bar{F}_3, \bar{F}_2, \bar{F}_3', \bar{F}_2') \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}_2')$.

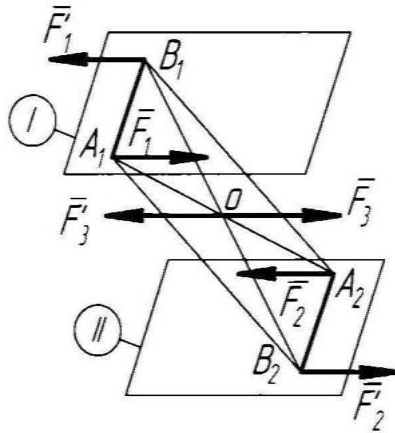


Рис. 6

Розглядаємо момент пари сил як векторну величину, яка характеризується трьома факторами (рис.7):

- а) напрямком, що перпендикулярний до площини дії пари;
- б) напрямком обертання пари;
- в) числовим значенням моменту пари.

Таким чином, дія пари на тіло повністю визначається модулем та напрямком її вектором моменту. Вектор моменту - вільний вектор, точка прикладання якого не має значення.

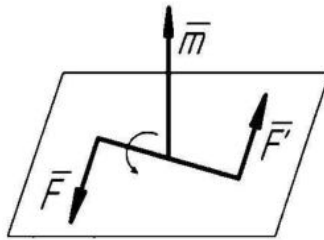


Рис.7

Тоді умова еквівалентності пар у загальному випадку у відповідності до наступної теореми: дві пари еквівалентні, якщо вектори їх моментів рівні.

Дано: $\bar{m}_1 = \bar{m}_2$.

Довести: $\text{пара} 1 \equiv \text{пара} 2$.

Доказ.

1) $\bar{m}_1 // \bar{m}_2 \Rightarrow$ пари у паралельних площинах переносимо в одну;

2) $m_1 = m_2 \Rightarrow$ моменти пар чисельно рівні;

3) \bar{m}_1 та \bar{m}_2 спрямовані в одному напрямку, тобто мають однаковий напрямок обертання.

1.3.3. Додавання просторової системи пар сил

Розглядаємо загальний випадок, коли дві пари розміщені у площинах, що перетинаються.

Теорема. Дві пари у площинах, що перетинаються, еквівалентні одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів даних пар.

Дано: $(\bar{F}_1, \bar{F}_1') \in$ площині I; $(\bar{F}_2, \bar{F}_2') \in$ площині II.

Довести: $\bar{M} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2$.

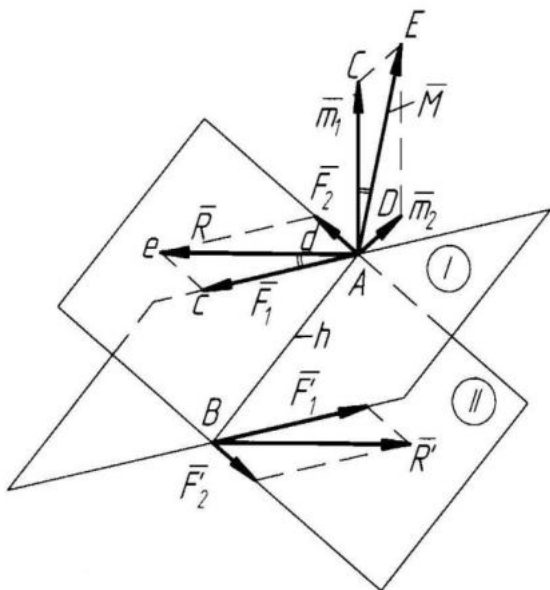


Рис.8

Доказ.

$\left. \begin{array}{l} \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = \bar{R}; \\ \bar{F}_1' + \bar{F}_2' = \bar{R}' \end{array} \right\}$ очевидно, що $\bar{R}' = -\bar{R}$, де \bar{R} - рівнодійна пари.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} \perp \text{площини } I; AC = m_1 = F_1 \cdot h; \\ \overline{AD} \perp \text{площини } II; AD = m_2 = F_2 \cdot h; \\ \overline{AE} \perp \text{площини } \left(\overline{R, R'} \right); AE = M = R \cdot h \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle CAE = \angle CAe; \\ \frac{AC}{AE} = \frac{F_1 \cdot h}{R \cdot h} = \frac{F_1}{R} = \frac{AC}{AE} \end{array} \Rightarrow \Delta ACE$$

$\sim \Delta ACe$ та $\Delta ADE \sim \Delta ADe$. Тоді маємо $ACED \sim Aced$, тобто $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{AD}$ або $\overline{M} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2$.

Наслідки.

1. Просторова система пар, що розташовані у непаралельних площинах, еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює векторній сумі моментів складових пар $\overline{M} = \sum_{k=1}^n \overline{m}_k$. (1)

З геометричної сторони - замикаючій стороні багатокутника векторів моментів.

2. Система пар, що розташовані в одній або паралельних площинах,

еквівалентна одній парі, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар $M = \sum_{k=1}^n m_k$. (2)

1.3.4. Умови рівноваги системи пар сил

Умова рівноваги просторової системи пар сил має вид:

$$M = R \cdot h = 0 \Rightarrow R = 0 \text{ або } h = 0.$$

Різні її форми:

а) векторна форма $\sum_{k=1}^n \overline{m}_k = 0$, (3)

тобто для рівноваги просторової системи пар необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів цих пар дорівнювала нулю;

б) координатна форма:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(\sum m_x)^2 + (\sum m_y)^2 + (\sum m_z)^2} = 0,$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum m_x = 0; \\ \sum m_y = 0; \\ \sum m_z = 0; \end{array} \right\} \text{звідки} \quad (4)$$

тобто для рівноваги просторової системи пар необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів цих пар відносно осей дорівнювали нулю.

Окремий випадок - пари в одній або паралельних площинах

$$M = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n m_k = 0, \quad (5)$$

тобто для рівноваги системи пар, що розташовані в одній або паралельних площинах, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів пар дорівнювала нулю.

Приклад

Дано: $r_1 = 15$ см; $r_2 = 10$ см; $r_3 = 5$ см; $P_1 = 10$ Н; $P_2 = 20$ Н.

Визначити: P_3 ; α

Розв'язок:

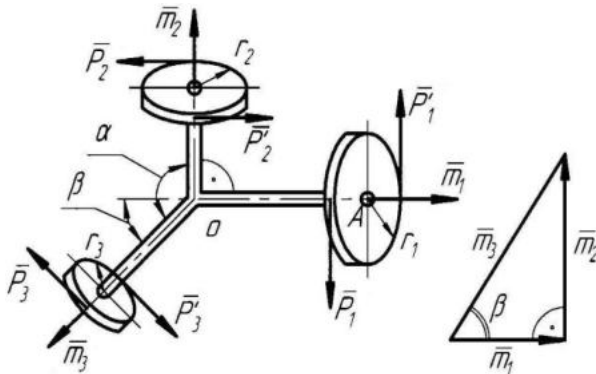


Рис.9

$$\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 0;$$

$$m_1 = P_1 \cdot h_1 = P_1 \cdot 2r_1 = 10 \cdot 2 \cdot 0,15 = 3 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$m_2 = P_2 \cdot h_2 = P_2 \cdot 2r_2 = 20 \cdot 2 \cdot 0,10 = 4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$m_3 = \sqrt{m_1^2 + m_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$P_3 = \frac{m_3}{2r_3} = \frac{5}{2 \cdot 0,05} = 50 \text{ Н.}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_2}{m_1} = \frac{4}{3}; \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 53^\circ; \quad \alpha = 143^\circ.$$

1.3.5. Момент сили відносно точки

Поняття моменту сили як алгебраїчної величини. Момент сили відносно точки (центру) – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на її плече відносно цієї точки

$$m_o(\vec{F}_i) = \pm F_i \cdot h_i, \quad (6)$$

де h - плече сили відносно даної точки (центру) - найкоротша відстань від точки до лінії дії сили.

Правило знаків для моменту сили відносно точки: якщо під дією сили тіло повертається навколо точки проти ходу годинникової стрілки, то момент сили приймають додатним, якщо по ходу – від'ємним.

Наприклад, за рис.10: $m_o(\vec{F}_1) = F_1 \cdot h_1$; $m_o(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot h_2$.

Як окремий випадок, $m_o(\vec{F}_3) = 0$, оскільки лінія дії сили проходить через точку, тобто плече сили відносно цієї точки дорівнює нулю.

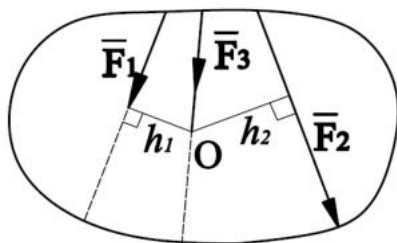


Рис.10

У випадках, коли визначення плеча h ускладнено, доцільно момент сили відносно точки, наприклад O , представляти у вигляді моментів проєкцій сили на вісі координат (рис.11)

$$m_o(\vec{F}) = F_y \cdot x - F_x \cdot y.$$

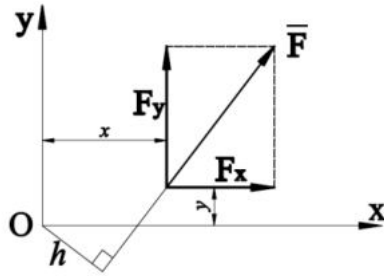


Рис.11

Поняття моменту сили як векторної величини. Модуль визначається за формулою $m_o = F \cdot h = 2$ площі $\triangle OAB$, а вектор (рис.12) прикладають до даної точки (центру) і спрямовують перпендикулярно до площини, що містить в собі силу та центр, таким чином, щоб з кінця вектора бачити обертання тіла під дією сили проти годинникової стрілки.

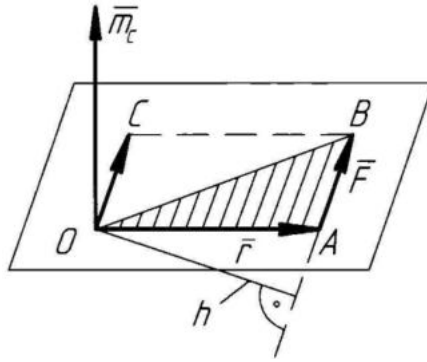


Рис.12

Момент сили відносно точки як векторний добуток.

Теорема. Момент сили відносно будь-якої точки дорівнює векторному добутку радіуса-вектора точки прикладання сили відносно точки на силу.

Відповідно до визначення векторного добутку:

$$\overline{m}_o = \overline{r} \times \overline{OC} \text{ або } \overline{m}_o(F) = \overline{r} \times \overline{F}, \quad (7)$$

де $\overline{OC} = \overline{F}$; $\overline{OA} = \overline{r}$ - радіус-вектор точки прикладання сили.

Розглянемо дві теореми про моменти сили та пари сил.

1. Теорема про суму моментів сил, що складають пару, відносно точки. Момент пари являє собою суму моментів сил пари відносно

будь-якої точки.

Розглянемо пару сил (\vec{F}, \vec{F}') і точку O на площині

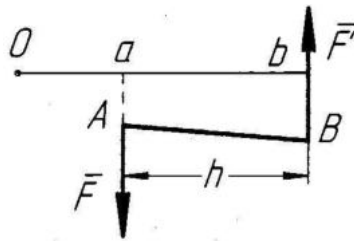
$$\sum m_O(\vec{F}) = F' \cdot Ob - F \cdot Oa = F(Ob - Oa) = F \cdot h = m$$


Рис.13

Аналогічне доведення для будь-якої точки в просторі.

2. Теорема про паралельний перенос сили (метод Пуансо). Будь-яка сила еквівалентна такій же за модулем та напрямком сили, але прикладеній до іншої точки, та певній парі.

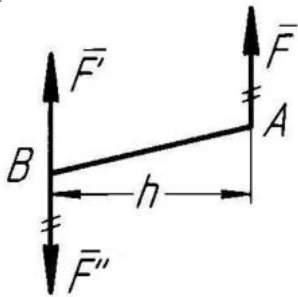


Рис.14

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}' &= -\vec{F}''; \\ F' &= F'' = F; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{F} \equiv (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \equiv \vec{F}'$$

та (\vec{F}, \vec{F}'') .

Пара (\vec{F}, \vec{F}'') , що виникає при паралельному переносі сили, називається приєднаною парою.

Момент приєднаної пари дорівнює (за абсолютною величиною та знаком) моменту даної сили відносно нової точки її прикладання, тобто

$$m = F \cdot h = m_B(F).$$

1.3.6. Зведення довільної системи сил до спільного центру. Основна теорема статyki

Використовуємо теорему про паралельний перенос сили.

Задано (рис.15) довільну систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$. Виконуємо перенос кожної із сил системи до спільного центру O :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{m}_1 = \bar{m}_O(\bar{F}_1); \\ \bar{m}_2 = \bar{m}_O(\bar{F}_2); \\ \dots\dots\dots \\ \bar{m}_3 = \bar{m}_O(\bar{F}_n); \end{array} \right\}, \text{ тобто } \bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k). \quad (9)$$

Величину \bar{M}_O називають головним моментом системи сил зведеного до спільного центру – точки O . Модуль та напрямок \bar{M}_O залежить від вибору центра зведення.

Основна теорема статички (теорема Пуансо): будь-яку систему сил можна звести до однієї сили, що дорівнює головному вектору системи, та одній парі, момент якої дорівнює головному моменту системи відносно центра зведення.

Таким чином, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \equiv \bar{R}' \text{ і } \bar{M}_O$.

Контрольні запитання

1. Визначення рівнодійної та точки її прикладання двох паралельних сил, що спрямовані в одному напрямку.
2. Визначення рівнодійної та точки її прикладання двох паралельних сил, що спрямовані в різних напрямках.
3. Визначення пари сил.
4. В чому полягає еквівалентність пар сил, що розташовані в одній площині?
5. Перелічити три фактори, які характеризують момент пари сил як векторну величину.
6. Записати умову рівноваги системи пар сил в векторній та координатній формах.
7. Визначення моменту сили як алгебраїчної величини.
8. В якому випадку момент сили відносно точки дорівнює нулю?
9. Сформулювати основну теорему статички.
10. Чи впливає вибір точки зведення при визначенні головного вектора та вектора головного моменту системи сил?

1.4. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ. ТЕРТЯ

Плоскою називають систему сил лінії дії якої розміщені в одній площині.

1.4.1. Додавання плоскої системи сил

Полягає в обчисленні головного вектора та головного моменту. Відповідно до основної теореми статyki:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}' &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \\ \bar{M}_o &= \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}' &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k; \\ \bar{M}_o &= \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

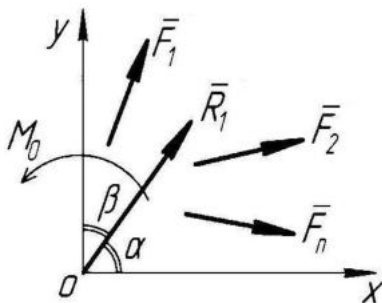


Рис.1

Тоді модуль головного вектору плоскої системи сил

$$R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2}, \quad (3)$$

де $R'_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = \sum X$; $R'_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum Y$;

напрямок - за напрямними косинусами

$$\cos \alpha = \frac{\sum X}{R'}; \quad \cos \beta = \frac{\sum Y}{R'}.$$

Головний момент визначається за алгебраїчною сумою моментів сил відносно центру зведення:

$$M_o = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k). \quad (4)$$

Зведення до рівнодійної плоскої системи сил виконують за теоремою Варіньона: момент рівнодійної плоскої системи сил відносно будь-якої точки (центру) дорівнює алгебраїчній сумі моментів сил системи відносно цієї точки.

Відповідно до основної теореми статки для плоскої системи сил маємо:

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \equiv \bar{R}' \text{ і } M_o.$$

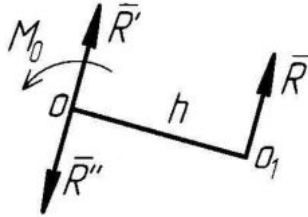


Рис.2

Силу та пару сил замінюємо однією силою

$$\left. \begin{aligned} M_o &\equiv (\bar{R}'' ; \bar{R}); \\ R'' &= R = R'; \\ h &= \frac{M_o}{R'} = \frac{M_o}{R}. \end{aligned} \right\}$$

Тоді $(\bar{R}' \text{ і } M_o) \equiv (\bar{R}', \bar{R}'', \bar{R}) \equiv \bar{R}$ - рівнодійна.

$$\left. \begin{aligned} M_o &= R \cdot h = m_o(\bar{R}); \\ M_o &= \sum m_o(\bar{F}); \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_o(\bar{R}) = \sum m_o(\bar{F}). \quad (5)$$

Розглянемо залежність головного моменту від вибору центра зведення (рис.3).

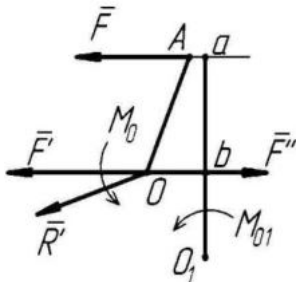


Рис.3

Діє система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$.

Для кожної із сил системи $\bar{F} \equiv \bar{F}' \text{ і } (\bar{F}, \bar{F}'')$;

$$\begin{aligned}
m_{O_1}(\bar{F}) &= F \cdot O_1 a = F \cdot (ab + O_1 b) = m_O(\bar{F}) + m_{O_1}(\bar{F}'); \\
\sum m_{O_1}(\bar{F}) &= \sum m_O(\bar{F}) + \sum m_{O_1}(\bar{F}'); \\
M_{O_1} &= M_O + m_{O_1}(\bar{R}') \Rightarrow M_{O_1} - M_O = m_{O_1}(\bar{R}'). \quad (6)
\end{aligned}$$

Таким чином, зміна головного моменту плоскої системи сил при заміні центру зведення дорівнює головному вектору, який прикладений в попередньому центрі зведення, відносно нового центру.

Окремий випадок - зведення плоскої системи сил до пари:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{R}' = 0; \\ M_O \neq 0; \end{array} \right\} \Rightarrow M_{O_1} - M_O = 0; M_{O_1} = M_O = const.$$

Висновок: якщо $\bar{R}' = 0$, а $M_O \neq 0$, то система сил еквівалентна парі сил, причому головний момент у цьому випадку не залежить від вибору центра зведення.

1.4.2. Рівновага плоскої системи сил

Розглянемо випадки зведення плоскої системи сил:

$$\left. \begin{array}{l} a) \bar{R}' \neq 0; M_O \neq 0 \Rightarrow \bar{R}; \\ b) \bar{R}' \neq 0; M_O = 0 \Rightarrow \bar{R}; \end{array} \right\} \text{ - система зводиться до рівнодійної};$$

$$\begin{aligned}
& в) \bar{R}' = 0; M_O \neq 0 \Rightarrow \text{пара сил з моментом } M_O = const; \\
& з) \bar{R}' = 0; M_O = 0 \Rightarrow \text{система в рівновазі.} \quad (7)
\end{aligned}$$

Висновок (векторна умова рівноваги): для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор та головний момент системи сил відносно будь-якого центру дорівнювали нулю.

Умова рівноваги в аналітичній формі має вид

$$\left. \begin{array}{l} R' = \sqrt{(\sum X)^2 + (\sum Y)^2} = 0; \\ M_O = \sum m_O(\bar{F}) = 0; \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum m_O = 0; \end{array} \right\}. \quad (8)$$

Висновок: для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил системи на вісі, що

належать в площині дії сил, дорівнювали нулю і алгебраїчна сума моментів всіх сил системи відносно будь-якої точки також дорівнювала нулю.

Розглянемо інші форми систем рівнянь рівноваги плоскої системи сил.

Одне рівняння проєкцій сил та два рівняння моментів:

$$\left. \begin{aligned} \sum X &= 0; \\ \sum m_A &= 0; \\ \sum m_B &= 0; \end{aligned} \right\} . \quad (9)$$

Необхідне виконання умови: AB не $\perp Ox$, інакше $R_x = \sum X = 0$ і при $\bar{R} \neq 0$.

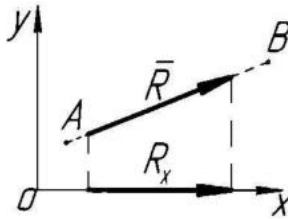


Рис.4

Три рівняння моментів:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A &= 0; \\ \sum m_B &= 0; \\ \sum m_C &= 0; \end{aligned} \right\} . \quad (10)$$

Умова виконання: точки A , B та C не лежать на одній прямій, інакше третє рівняння є наслідком перших двох.

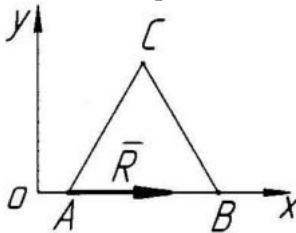


Рис.5

Окремі випадки рівноваги плоскої системи сил.

Плоска система паралельних сил. З основної форми (8) рівняння

$\sum X = 0$ виконується завжди, тому залишається:

$$\left. \begin{aligned} \sum Y = 0; \\ \sum m_o = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

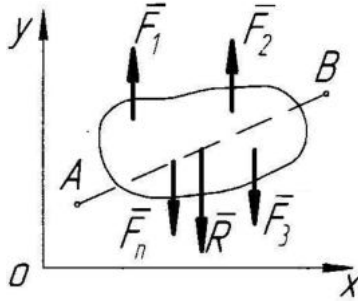


Рис.6

Висновок: для рівноваги плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій сил на вісь, їм паралельну, дорівнювала нулю, а також алгебраїчна сума моментів сил відносно будь-якої точки дорівнювала нулю.

Друга форма:

$$\left. \begin{aligned} \sum m_A = 0; \\ \sum m_B = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Умова виконання: лінія AB не паралельна силам. В іншому випадку обидва рівняння виконуються і при $\bar{R} \neq 0$, яка спрямована по AB .

Умова рівноваги важеля під дією плоскої системи сил. Важелем називається тіло, що обертається навколо нерухомої вісі. За основною теоремою статyki $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \equiv \bar{R}'$ і \bar{M}_O .

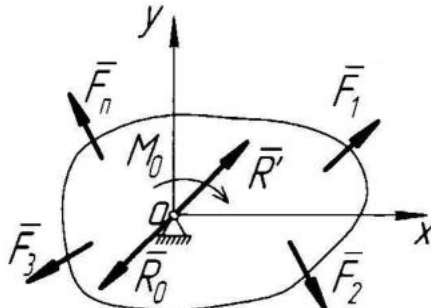


Рис.7

Головний вектор активних сил зрівноважується реакцією опори:

$$\bar{R}' = -\bar{R}_O, \text{ тобто завжди маємо } \begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0. \end{cases}$$

Залишається одна умова: $M_O = 0 \Rightarrow \sum m_O(\bar{F}) = 0$. (13)

Висновок: для рівноваги важеля під дією плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів сил відносно точки через яку проходить вісь важеля дорівнювала нулю.

1.4.3. Рівновага системи твердих тіл

Розглядаємо поділ сил на зовнішні та внутрішні сили. Сили, з якими тіла, що складають дану систему, діють одне на одне, називаються внутрішніми. Всі інші сили – зовнішні. На прикладі кривошипно-шатунного механізму маємо зовнішні сили $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{Q}$, момент зовнішніх сил M_{on} ; внутрішні сили $\bar{R}_O, \bar{R}_{12}, \bar{R}_{21}, \bar{R}_{23}, \bar{R}_{32}, \bar{R}_{43}$. $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$; $\bar{R}_{23} = -\bar{R}_{32}$.

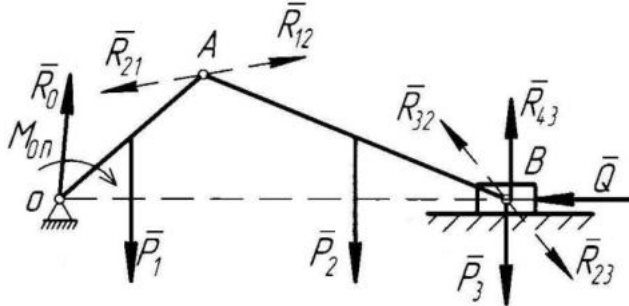


Рис.8

Для системи з n тіл в загальному випадку можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги. Якщо k - кількість невідомих в системі рівнянь рівноваги, то при $k > 3n$ - конструкція статично невизначена, при $k \leq 3n$ - статично визначена.

Якщо рівняння рівноваги окремих тіл скласти, то в отриманому таким чином рівнянні члени, які мають внутрішні сили, скорочуються та залишаються тільки зовнішні сили.

Висновок: якщо система тіл знаходиться в рівновазі, то діючі на систему зовнішні сили задовольняють умовам рівноваги сил, які прикладені до одного твердого тіла.

Приклад

Дано: $P; Q; AC = BC = 2l; CD = CE = a; BK = b; \alpha$.

Визначити: $N_1; N_2; T; X_c; Y_c$

Розв'язок

Для всієї драбини:

$$\sum m_B = -N_1 \cdot 2l \cos \alpha + P \cdot 1,5l \cos \alpha + P \cdot 0,5l \cos \alpha + Q \cdot b \cos \alpha = 0,$$

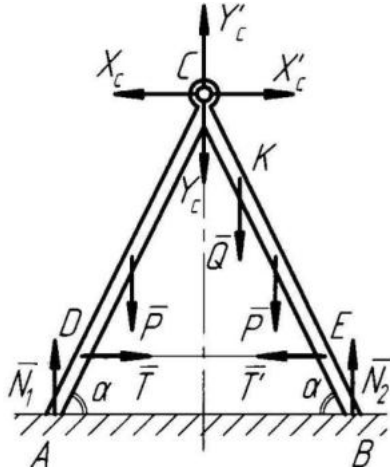


Рис.9

звідки
$$N_1 = P + Q \frac{b}{2l}.$$

$$\sum Y = N_1 + N_2 - 2P - Q = 0, \text{ звідки } N_2 = P + Q \left(1 - \frac{b}{2l}\right).$$

Для лівої частини AC:
$$\sum Y = N_1 - P - Y_c = 0,$$

звідки
$$Y_c = Q \frac{b}{2l}.$$

$$\sum m_C = -N_1 \cdot l \cos \alpha + P \cdot 0,5l \cos \alpha + T \cdot a \sin \alpha = 0,$$

звідки
$$T = \frac{0,5 \cos \alpha}{a \sin \alpha} (P \cdot l + Q \cdot b).$$

$$\sum X = T - X_c = 0, \text{ звідки } X_c = T = \frac{0,5 \cos \alpha}{a \sin \alpha} (P \cdot l + Q \cdot b).$$

1.4.4. Рівновага сил при наявності тертя. Сухе тертя ковзання в спокою

Розрізняють наступні види тертя.

1. За характером дотику поверхонь тертя: сухе та рідинне тертя (тертя тіл, які змащують – гідродинаміка);

2. За характером відносного руху тіл тертя: тертя ковзання та тертя кочення.

Опір, що виникає при ковзанні одного тіла по поверхні іншого,

називається тертям ковзання.

Повна реакція \vec{R} поверхні має дві складові: нормальну \vec{N} та дотичну \vec{T} , тобто $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$.

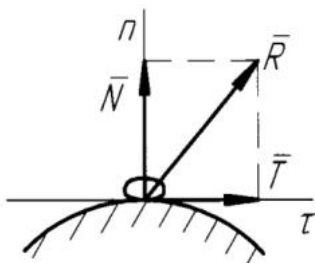


Рис.10

Розрізняють силу тертя в спокою (статичне тертя) та силу тертя в русі (динамічне тертя).

Причинами виникнення тертя ковзання є:

а) шорсткість поверхонь (ш/п) тертя;

б) молекулярні взаємодії (м/в) тіл тертя.

Границі сили тертя в спокою: $0 \leq T \leq T_{\max}$.

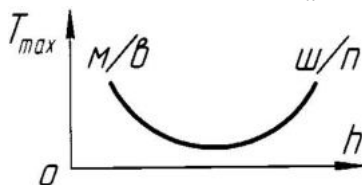


Рис.11

Розглянемо закони тертя ковзання в спокою. Основний закон – закон Кулона:

$$T_{\max} = f \cdot N \Rightarrow f = \frac{T_{\max}}{N} - \text{статичний коефіцієнт тертя.}$$

Коефіцієнту тертя f залежить від:

- а) матеріалу тіл тертя та стану їх поверхонь;
- б) часу попереднього контакту;
- в) питомого тиску.

1.4.5. Тертя ковзання в русі. Кут та конус тертя

Визначальним є закон Кулона: сила тертя пропорційна нормальному тиску, тобто $T_q = f_q \cdot N$.

Сила тертя спрямована протилежно відносній швидкості.

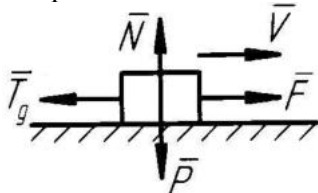


Рис.12

Вплив величини відносної швидкості на силу тертя ковзання зменшується за рис.13.

Повна реакція опорної поверхні за рис.14: $\bar{R} = \bar{N} + \bar{T}$

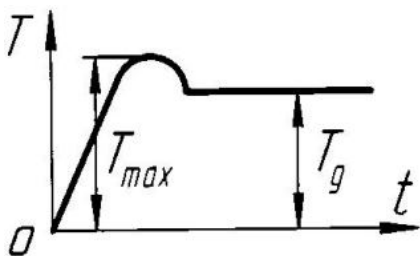


Рис.13

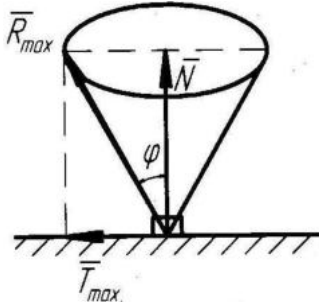


Рис.14

Кут φ між повною реакцією \bar{R}_{\max} та нормаллю \bar{N} до поверхні в момент початку руху з місця називається кутом тертя та визначається за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_{\max}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f .$$

Геометричне місце прямих ліній, проведених з точки опорної поверхні під кутом тертя до її нормалі, утворює конічну поверхню, яка називається конусом тертя. При рівновазі повна реакція є всередині конуса, перед початком руху з місця – на поверхні конуса.

Коефіцієнт тертя можна визначати за допомогою похилої площини (рис.15).

Рівняння рівноваги
$$\left. \begin{aligned} \sum X = T - P \sin \alpha = 0; \\ \sum Y = N - P \cos \alpha = 0; \end{aligned} \right\}$$

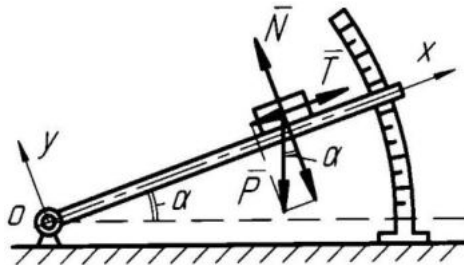


Рис.15

В момент початку руху з місця

$$P \sin \alpha = T_{\max} = f \cdot N = f \cdot P \cos \alpha; \left. \begin{aligned} \sin \alpha = f \cos \alpha; \\ f = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \varphi,$$

тобто кут нахилу α дорівнює куту тертя φ .

1.4.6. Тертя кочення

Тертям кочення є опір перекочуванню одного тіла по другому. Причиною цього є реакція \bar{N} опорної поверхні через деформацію зміщена в бік руху, причому $\bar{N} = -\bar{P}$.

Момент рушійної, а також момент тертя кочення не залежить від радіусу котка і пропорційний його вазі

$$M_{руш} = P \cdot k; M_{коч} = N \cdot \lambda.$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A = M_{коч} - M_{руш} = 0; \\ M_{руш} = M_{коч}; P \cdot k = N \cdot \lambda \end{aligned} \right\} \text{при } N = P \Rightarrow k = \lambda.$$

Коефіцієнт тертя кочення k дорівнює зміщенню λ реакції \bar{N} в бік руху.

Виконаємо дослідне визначення коефіцієнту κ (рис.17):

$$\sum m_A = Q \cdot r + N \cdot k - |Q + q| \cdot r = 0;$$

$$q \cdot r = N \cdot k = |P + 2Q + q|;$$

$$k = \frac{q \cdot r}{P + 2Q + q}.$$

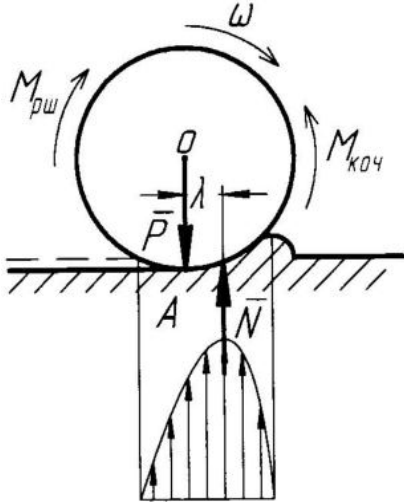


Рис.16

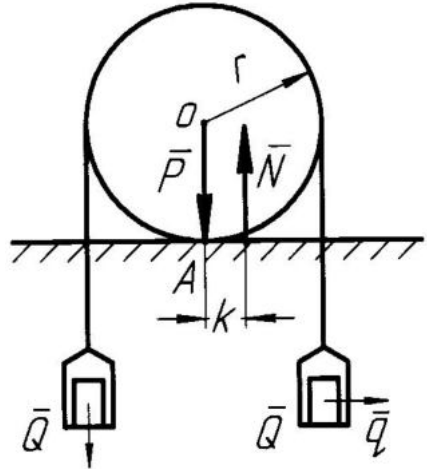
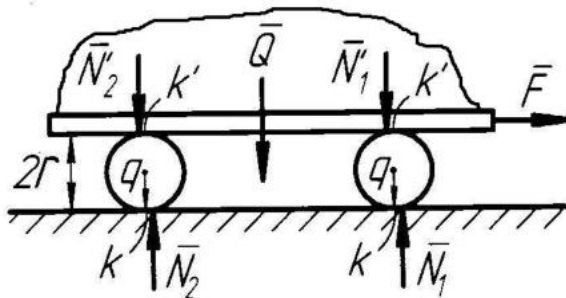


Рис.17

Встановлено, що для колеса автомобіля по трасі $k = 0,15$ см, для тіла кочення роликотпідшипника $k = 0,01$ см.

Приклад

Переміщення вантажу на котках.



Дано: $Q; q; r; k; k'$.

Визначити: рушійну силу F .

Розв'язок:

$$M_{руш} = M_{коч} + M'_{коч}$$

$$\text{або } F \cdot 2r = |N_1 + N_2| \cdot k + |N'_1 + N'_2| \cdot k' = |Q + 2q| \cdot k + Q \cdot k'.$$

$$\text{При } q \ll Q: F = \frac{Q(k + k')}{2r}.$$

Порівняння:

$$\text{а) при } k = k' = 0,1 \text{ см; } r = 10 \text{ см маємо } F = \frac{0,2Q}{20} = 0,01Q;$$

$$\text{б) при } f = 0,3 \text{ маємо } F = f \cdot Q = 0,3Q.$$

Контрольні запитання

1. Як визначається модуль та напрямок головного вектора плоскої системи сил?
2. Сформулювати теорему Варіньона про зведення до рівнодійної плоскої системи сил.
3. Записати умови окремих випадків зведення плоскої системи сил до пари сил та рівнодійної.
4. Записати векторну та аналітичну форми умови рівноваги плоскої системи сил.
5. В якому випадку можна використовувати три рівняння моментів в умові рівноваги плоскої системи сил.
6. Умова рівноваги плоскої системи паралельних сил. Записати дві форми.
7. Умова рівноваги системи твердих тіл під дією плоскої системи сил.
8. Які задачі статички називають статично визначеними, які – статично невизначеними?
9. Які дві складові має повна реакція поверхні?
10. Назвати кут між повною реакцією та нормаллю до поверхні в момент початку руху.
11. В яких одиницях вимірюються коефіцієнт тертя кочення та ковзання?

1.5. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

Система сил, лінії дії яких як завгодно розташовані в просторі, називається просторовою системою довільно розташованих сил або просторовою системою сил.

1.5.1. Момент сили відносно вісі

Мірою обертового ефекту сили відносно вісі z є момент $m_O(\bar{F})$.

Алгебраїчний момент $m_z(\bar{F})$ сили \bar{F} відносно вісі z дорівнює добутку модуля проекції f сили \bar{F} на площину, яка перпендикулярна вісі z , та відстані h від точки O перетину вісі з цією площиною до лінії дії проекції сили f на площині, тобто

$$m_z(\bar{F}) = m_O(f) = f \cdot h. \quad (1)$$

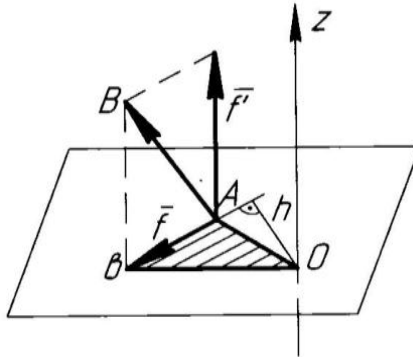


Рис.1

Якщо з кінця вісі z видно, що проекція f сили \bar{F} намагається повернути тіло навколо точки O проти ходу годинникової стрілки, то момент додатній, якщо за ходом - від'ємний, тобто маємо:

$$m_z(\bar{F}) = \pm f \cdot h. \quad (2)$$

Момент сили \bar{F} відносно вісі z на рисунку є додатній.

Момент сили відносно вісі дорівнює нулю, якщо лінія дії сили і вісь лежать в одній площині, а саме:

а) сила паралельна вісі (при цьому проекція f сили \bar{F} на перпендикулярну до вісі площину дорівнює нулю, тобто $f=0$);

б) лінія дії сили перетинає вісь (при цьому $h=0$).

Залежність між моментами сили відносно точки та відносно вісі, яка проходить через цю точку виражається наступною теоремою: проєкція вектора головного моменту сили відносно точки на вісь, яка проходить через цю точку, дорівнює моменту цієї сили відносно цієї вісі.

З геометричних співвідношень (рис.2) маємо пл. $\Delta Oab = \text{пл. } \Delta OAB \cdot \cos \gamma$;

$$m_{oz} = m_o \cdot \cos \gamma = 2 \text{ пл. } \Delta OAB \cdot \cos \gamma = 2 \text{ пл. } \Delta Oab = m_o(\bar{f}) = m_z(\bar{F}).$$

1.5.2. Визначення головного вектора та головного моменту довільної системи сил

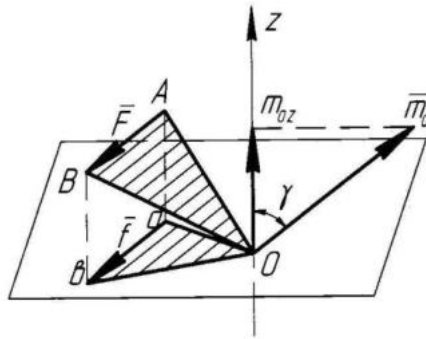


Рис.2

У відповідності до основної теореми статки головний вектор \bar{R}' системи сил дорівнює векторній сумі сил просторової системи, тобто

$$\bar{R}' = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3)$$

Модуль вектора \bar{R}' визначають за проєкціями на координатні вісі x , y та z , початок яких знаходиться в центрі зведення O :

$$R' = \sqrt{(R'_x)^2 + (R'_y)^2 + (R'_z)^2}. \quad (4)$$

Модулі проєкцій \bar{R}' обчислюється за формулами:

$$R'_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = \sum X; R'_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = \sum Y; R'_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = \sum Z, \quad (5)$$

а напрямок вектора \bar{R}' - за косинусами кутів між вектором та

координатними осями x , y та z

$$\cos(x, \hat{\bar{R}}') = \frac{R'_x}{R'}; \quad \cos(y, \hat{\bar{R}}') = \frac{R'_y}{R'}; \quad \cos(z, \hat{\bar{R}}') = \frac{R'_z}{R'}. \quad (6)$$

Головний момент \bar{M}_O відносно центру зведення O

$$\bar{M}_O = \sum_{k=1}^n \bar{m}_O(\bar{F}_k).$$

Модуль вектора \bar{M}_O визначають за проекціями на координатні вісі x , y та z :

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (7)$$

Модулі проекцій \bar{M}_O :

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^n m_{Ox}(\bar{F}_k) = M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{F}_k); \\ M_{Oy} &= \sum_{k=1}^n m_{Oy}(\bar{F}_k) = M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k); \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^n m_{Oz}(\bar{F}_k) = M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{F}_k), \end{aligned} \quad (8)$$

де M_{Ox}, M_{Oy}, M_{Oz} та M_x, M_y, M_z - головні моменти відносно точки та відповідно осей.

Напрямок вектора \bar{M}_O визначається за косинусами кутів між вектором та координатними осями x , y та z :

$$\cos(x, \hat{\bar{M}}_O) = \frac{M_x}{M_O}; \quad \cos(y, \hat{\bar{M}}_O) = \frac{M_y}{M_O}; \quad \cos(z, \hat{\bar{M}}_O) = \frac{M_z}{M_O}. \quad (9)$$

Розглянемо залежність головного моменту від вибору центру зведення (рис.3). Відповідно до основної теореми статички $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \equiv \bar{R}'$ і \bar{M}_O .

Співвідношення між радіусами-векторами $\bar{r}_1 = \bar{r}_O + \bar{r}$. Тоді:

$$\bar{m}_{O1}(\bar{F}) = \bar{r}_1 \times \bar{F} = (\bar{r}_O + \bar{r}) \times \bar{F} = \bar{r}_O \times \bar{F} + \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r}_O \times \bar{F} + \bar{m}_O(\bar{F});$$

$$\bar{M}_{o1} = \sum \bar{m}_{o1}(\bar{F}) = \sum (\bar{r}_{o1} \times \bar{F}) + \sum \bar{m}_o(\bar{F}) = \bar{r}_{o1} \times \sum \bar{F} + \bar{M}_o = \bar{r}_{o1} \times \bar{R}' + \bar{M}_o. \quad (10)$$

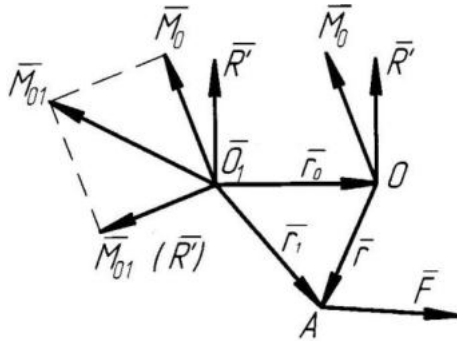


Рис.3

Таким чином, модуль та напрямок головного моменту \bar{M}_o залежить від вибору центру зведення. При зведенні просторової системи сил до нового центру головний момент змінюється відповідно до формули:

$$\bar{M}_{o1} = \bar{M}_o + \bar{M}_{o1}(\bar{R}_o'), \quad (11)$$

де \bar{M}_o , $\bar{M}_{o1}(\bar{R}_o') = \bar{r}_{O1O} \times \bar{R}_o'$ - головні моменти просторової системи сил відносно попереднього O та нового A центрів зведення.

Окремим випадком є зведення до пари сил: якщо головний вектор системи сил дорівнює нулю, а головний момент не дорівнює нулю, тобто $\bar{R}' = 0$ та $\bar{M}_o \neq 0$, то система зводиться до пари сил, момент якої дорівнює головному моменту \bar{M}_o , який не залежить від вибору центру зведення.

1.5.3. Рівнодійна довільної системи сил

Можливі два випадки зведення довільної системи сил до рівнодійної (рис.4):

а) $\bar{M}_o = 0; \bar{R}' \neq 0 \Rightarrow \bar{R}' = \bar{R}$, тобто система сил зводиться до рівнодійної $\bar{R} = \bar{R}'$, лінія дії якої проходить через центр зведення O ;

б) $\bar{R}' \neq 0$; $\bar{M}_O \neq 0$ та $\bar{M}_O \perp \bar{R}'$ - головний момент замінюємо парою сил в площині, яка перпендикулярна до \bar{M}_O з плечем $h = OO_1 = \frac{M_O}{R'} = \frac{M_O}{R}$.

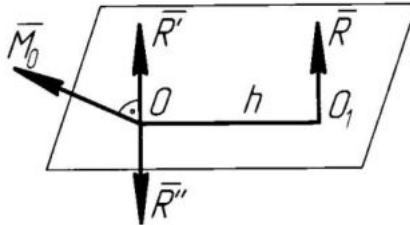


Рис.4

Тоді $(\bar{R}' \text{ та } \bar{M}_O) \equiv (\bar{R}', \bar{R}'', \bar{R}) \equiv \bar{R}$ - рівнодійна. Лінія дії рівнодійної \bar{R} паралельна головному вектору \bar{R}' та віддалена від неї на відстань $OO_1 = M_O / R'$. Положення лінії дії рівнодійної \bar{R} повинно бути таким, щоб напрямок моменту рівнодійної \bar{R} відносно центру зведення O співпадав з напрямком головного моменту системи сил \bar{M}_O відносно центру O.

Умовою існування рівнодійної при $\bar{R}' \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ є:

а) в векторній формі $\bar{R}' \cdot \bar{M}_O = 0$, тобто достатньо, щоб скалярний добуток головного вектора та головного моменту сил дорівнювали нулю;

б) в аналітичній формі:

$$\bar{R}' \cdot \bar{M}_O = R'_x \cdot M_x + R'_y \cdot M_y + R'_z \cdot M_z = 0. \quad (12)$$

Тоді теорема Варіньона в загальному виді формулюється наступним чином: якщо просторова система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якого центру дорівнює векторній сумі моментів всіх сил системи відносно того ж центру.

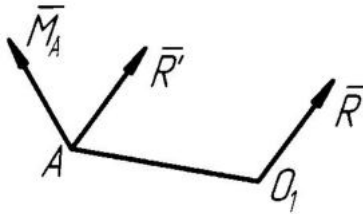


Рис.5

За теоремою про зміну головного моменту при зміні центру зведення $\bar{M}_A - \bar{M}_{O_1} = m_A(\bar{R})$. При $\bar{M}_{O_1} = 0$ маємо $\bar{M}_A = m_A(\bar{R})$. Враховуючи, що $\bar{M}_A = \sum \bar{m}_A(\bar{F})$, отримаємо $\bar{m}_A(\bar{R}) = \sum \bar{m}_A(\bar{F})$. (13)

Наслідок: плоска система сил має рівнодійну, то момент цієї рівнодійної відносно будь-якої вісі дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх сил системи відносно тієї ж вісі.

Рівняння $\bar{m}_A(\bar{R}) = \sum \bar{m}_A(\bar{F})$ проектуємо на вісь Ax :

$$m_{Ax}(\bar{R}) = \sum m_{Ax}(\bar{F}) \Rightarrow m_x(\bar{R}) = \sum m_x(\bar{F}), \quad (14)$$

1.5.4. Загальний випадок зведення довільної системи сил

Зведення до двох перехресних сил. Якщо $\bar{R}' \neq 0$, $\bar{M}_O \neq 0$ і вектор головного моменту \bar{M}_O не перпендикулярний до головного вектору \bar{R}' (кут між векторами $\alpha \neq 90^\circ$). При $\bar{M}_O \perp$ до площини I, замінюємо \bar{M}_O парою: $\bar{M}_O \equiv (\bar{Q}, \bar{Q}')$,

де $Q = \frac{M_O}{h}$, h - плече в площині I.

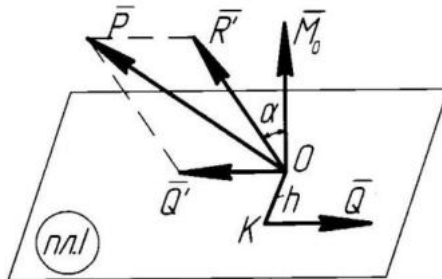


Рис.6

За правилом паралелограма сил $\vec{R}' + \vec{Q}' = \vec{P}$.

Отже, \vec{R}' і $\vec{M}_o \equiv (\vec{R}', \vec{Q}', \vec{Q}) \equiv (\vec{P}, \vec{Q})$ – дві перехресні сили.

Висновок: у загальному випадку плоска система сил не має рівнодійної.

Зведення до силового гвинта (до динами). Маємо $\vec{M}_o = \vec{M}'_o + \vec{M}''_o$ та $M'_o = M_o \cos \alpha; M''_o = M_o \sin \alpha$.

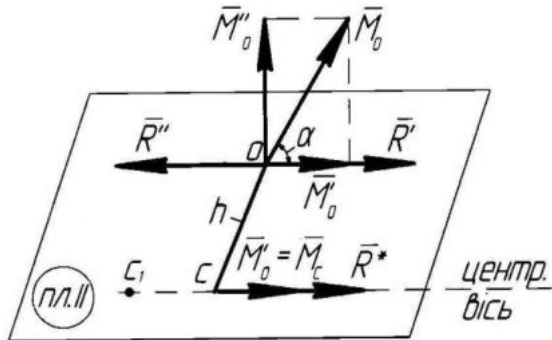


Рис.7

Замінюємо $\vec{M}''_o \equiv (\vec{R}'', \vec{R}^*)$, де плече пари $h = OC = \frac{M''_o}{R'}$ при умові

$$R' = R'' = R^*.$$

Тоді:

$$(\vec{R}', \vec{M}_o) \equiv (\vec{R}', \vec{M}'_o, \vec{M}''_o) \equiv (\vec{R}', \vec{M}'_o, \vec{R}'', \vec{R}^*) \equiv (\vec{M}'_o, \vec{R}^*) \equiv (\vec{R}^*, \vec{M}_C).$$

Таким чином, при $\vec{R}' \cdot \vec{M}_o \neq 0$, $\vec{R}' \neq 0$, $\vec{M}_o \neq 0$ та

$\cos(\vec{R}', \vec{M}_o) \neq 0$ – система сил зводиться до динами (силового гвинта) – сукупності сили \vec{R}' та пари сил, момент якої спрямований вздовж лінії дії цієї сили.

Лінію дії сили \vec{R}' називають центральною гвинтовою віссю.

Мінімальний головний момент визначається за формулою:

$$M_o = \sqrt{(M''_o)^2 + (M'_o)^2} = \sqrt{(R' \cdot h)^2 + M_C^2} \Rightarrow M_o = f(h).$$

Якщо $h = 0$, то центр зведення знаходиться на центральній вісі, то $M_o = M_C = M_{\min}$.

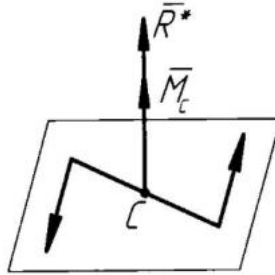


Рис.8

Висновок: центральна гвинтова вісь є геометричним місцем центрів зведення, для яких головний момент \overline{M}_o має найменше значення та спрямований вздовж цієї вісі. Модуль найменшого моменту визначається за формулою:

при

$$\left. \begin{aligned} M_C = M'_o = M_o \cos \alpha; \\ R' \cdot M_C = R' \cdot M_o \cos \alpha = \overline{R}' \cdot \overline{M}_o \end{aligned} \right\},$$

$$M^* = M_{o\min} = M_o \cos(\overline{R}' \wedge \overline{M}_o) = \frac{\overline{R}' \cdot \overline{M}_o}{R'} =$$

$$= \frac{M_o R' \cos(\overline{R}' \wedge \overline{M}_o)}{R'} = \frac{R'_x \cdot M_x + R'_y \cdot M_y + R'_z \cdot M_z}{R'}. \quad (15)$$

При переміщенні центру зведення вздовж центральної вісі головний момент даної системи сил не змінюється.

Статичні інваріанти системи сил. Статичними інваріантами просторової системи сил називають такі характеристики системи сил, які залишаються сталими при зміні центру зведення.

Першим (векторним) статичним інваріантом є головний вектор \overline{R}' системи сил, модуль та напрям якого не залежить від вибору центру зведення:

$$I_1 = \overline{R}' = R'_x \bar{i} + R'_y \bar{j} + R'_z \bar{k}.$$

Другий (скалярний) статичний інваріант – скалярний добуток головного вектора \overline{R}' та вектора головного моменту \overline{M}_o , який також не залежить від вибору центру зведення:

$$I_2 = \bar{\mathbf{R}}' \cdot \bar{\mathbf{M}}_O = R'_x \cdot M_x + R'_y \cdot M_y + R'_z \cdot M_z.$$

Другий інваріант – найменший головний момент, який дорівнює проекції головного моменту відносно будь-якого центру зведення на напрямок головного вектора.

1.5.5. Рівновага просторової системи сил

Основними випадками зведення просторової системи сил є:

а) якщо $\bar{\mathbf{R}}' \neq 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ і вектор головного моменту $\bar{\mathbf{M}}_O$ не перпендикулярний до головного вектору $\bar{\mathbf{R}}'$ (кут між векторами $\alpha \neq 90^\circ$) – система сил зводиться до двох перехресних сил або динами;

б) якщо $\bar{\mathbf{R}}' \neq 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ та $\bar{\mathbf{M}}_O \perp \bar{\mathbf{R}}'$ – до рівнодійної $\bar{\mathbf{R}}$;

в) якщо $\bar{\mathbf{R}}' \neq 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$ – до рівнодійної $\bar{\mathbf{R}}$;

з) якщо $\bar{\mathbf{R}}' = 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O \neq 0$ – до пари сил з моментом $\bar{\mathbf{M}}_O$;

д) якщо $\bar{\mathbf{R}}' = 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$ – до умови рівноваги.

Розглянемо умову рівноваги в векторній формі. У відповідності до основної теореми статyki ($\bar{\mathbf{F}}_1, \bar{\mathbf{F}}_2, \dots, \bar{\mathbf{F}}_n$) $\equiv \bar{\mathbf{R}}'$ і $\bar{\mathbf{M}}_O$ та

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{R}}' = \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{F}}_k \\ \bar{\mathbf{M}}_O = \sum_{k=1}^n m_O(\bar{\mathbf{F}}_k) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{k=1}^n \bar{\mathbf{F}}_k = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_O(\bar{\mathbf{F}}_k) = 0 \end{array} \right\}. \quad (16)$$

Таким чином, для рівноваги просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб векторні суми сил системи та векторні суми їх моментів відносно будь-якої точки дорівнювали нулю.

При розгляді умови рівноваги в аналітичній формі враховуємо, що векторна форма умову рівноваги $\bar{\mathbf{R}}' = 0$, $\bar{\mathbf{M}}_O = 0$, тобто:

$$R' = \sqrt{R_x'^2 + R_y'^2 + R_z'^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2 + (\sum F_{kz})^2} = 0 \text{ та}$$

$$M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(\sum m_x)^2 + (\sum m_y)^2 + (\sum m_z)^2} = 0$$

маємо:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0 \end{array} \right\} \text{та} \left. \begin{array}{l} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{array} \right\}. \quad (17)$$

Перші три рівняння називають рівняннями проекцій сил, які забезпечують рівність нулю головного вектора \bar{R}' . Три останніх рівняння називають рівняннями моментів, які забезпечують рівність нулю головного моменту \bar{M}_o .

Висновок: для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил системи на довільно вибрані осі координат x, y, z і суми моментів всіх сил відносно цих осей дорівнювали нулю.

Розглянемо окремі випадки:

а) для системи збіжних сил

$$\left. \begin{array}{l} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{array} \right\} \text{ - умови, які}$$

виконуються завжди.

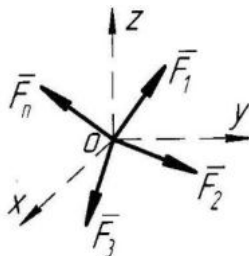


Рис.9

Залишаються для умови рівноваги перші три рівняння системи (17)

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0 \end{array} \right\}, \quad (18)$$

тобто для рівноваги просторової системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил системи на довільно вибрані осі координат x, y, z

дорівнювали нулю.

б) для плоскої система сил

$$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k &= 0 \end{aligned} \right\} - \text{умови, які}$$

виконуються завжди.

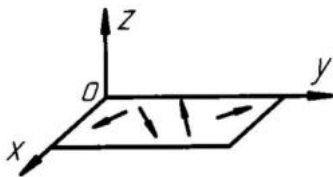


Рис.10

Залишаються для умови рівноваги наступні рівняння системи (17):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = \sum X_k &= 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = \sum m_o(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (19)$$

тобто для рівноваги плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил системи на довільно вибрані вісі координат x , y , які розміщені в площині дії сил, дорівнювали нулю та алгебраїчна сума моментів сил системи відносно будь-якої точки також дорівнювала нулю.

в) для системи сил паралельних вісі z :

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = \sum X_k &= 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = \sum m_o(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\} - \text{умови,}$$

які виконуються завжди.

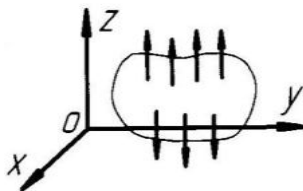


Рис.11

Залишаються для умови рівноваги наступні рівняння системи (17):

$$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (20)$$

тобто для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил системи на вісь, яка паралельна лініям дії сил, дорівнювала нулю та алгебраїчна сума моментів сил системи відносно інших осей також дорівнювала нулю.

Систематизуючи та узагальнюючи вище наведені дані про умови рівноваги для різних систем сил, складено інформативну таблицю.

1.5.6. Окремі випадки рівноваги невідного твердого тіла

Вище були приведені рівняння рівноваги вільного твердого тіла. За допомогою принципу звільнення від в'язей їх використовують також для невідних тіл та визначають реакції в'язей. Тут мова йде про рівновагу невідного твердого тіла під дією активних сил. Умови рівноваги невідного тіла визначаються тими рівняннями, які не містять реакцій в'язей.

Умови рівноваги тіла з однією закріпленою точкою розглянемо на прикладі рис.12:

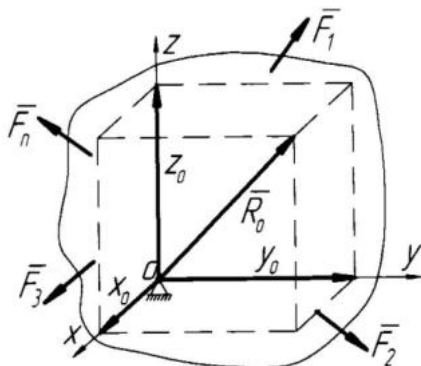


Рис.12

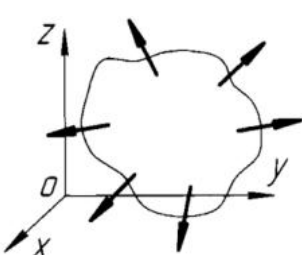
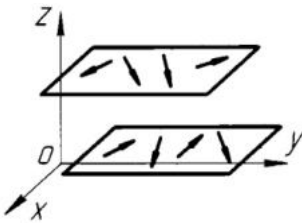
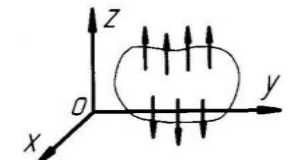
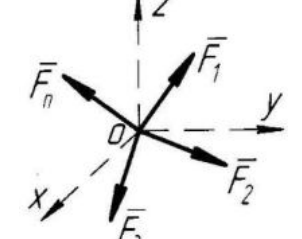
$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} + X_o &= 0; \\ \sum F_{ky} + Y_o &= 0; \\ \sum F_{kz} + Z_o &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

та

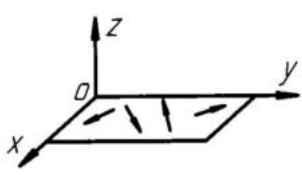
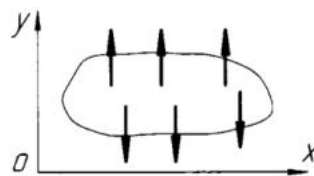
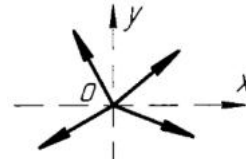
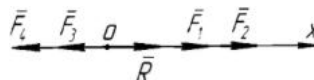
$$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Рівняння (21) проєкцій сил дозволяють визначити реакції в'язі, рівняння моментів (22) являються умовами рівноваги. Таким чином, якщо тверде тіло з однією нерухомою точкою знаходиться в рівновазі, то алгебраїчна сума моментів усіх діючих на тіло активних сил відносно трьох координатних осей, початок яких знаходиться в нерухомій точці, дорівнює нулю.

Таблиця

№ п/п	Система сил	Схема розташування сил	Рівняння рівноваги	К-сть рівнянь
1	2	3	4	5
1	Сили, які довільно розташовані в просторі		$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0 \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\}$	6
2	Сили, які розташовані в паралельних площинах		$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \end{aligned} \right\}$ $\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\}$	5
3	Паралельні сили в просторі		$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0 \end{aligned} \right\}$	3
4	Збіжні сили у просторі		$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) = 0 \end{aligned} \right\}$	3

Продовження таблиці 1

1	2	3	4	5
5	Сили, які довільно розташовані в площині		$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \\ \sum m_o(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}$	3
6	Паралельні сили в площині		$\left. \begin{aligned} \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \\ \sum m_o(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}$	2
7	Збіжні сили в площині		$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \end{aligned} \right\}$	2
8	Сили, які діють вздовж однієї лінії		$\sum F_{kx} = 0$	1

Для рівноваги тіла з двома закріпленими точками (рис.13) необхідно:

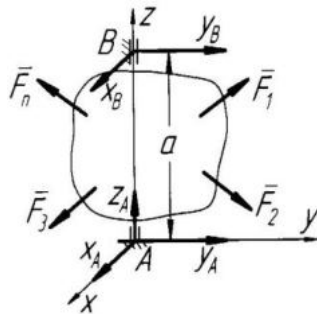


Рис.13

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} + X_A + X_B &= 0; \\ \sum F_{ky} + Y_A + Y_B &= 0; \\ \sum F_{kz} + Z_A &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (23, a)$$

та

$$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) - y_B \cdot a &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) + x_B \cdot a &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23, б)$$

Рівняння (23, а) проєкцій сил та перші два рівняння моментів (23, б) дозволяють визначити реакції в'язей. Рівняння моментів відносно вісі Z являється умовою рівноваги: для рівноваги тіла з двома закріпленими точками необхідно та достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів усіх діючих на тіло активних сил відносно нерухомої вісі дорівнює нулю.

Контрольні запитання

1. Перелічити можливі випадки зведення довільно розміщених сил.
2. До якого найпростішого виду можна звести систему сил, якщо відомо, що головний момент цих сил відносно різних точок на площині:
 - а) має різний модуль;
 - б) має стале значення, яке не дорівнює нулю;
 - в) дорівнює нулю.
3. Дати визначення моменту сили відносно вісі як алгебраїчної величини. Сформулювати правило знаків.
4. Дати визначення моменту сили відносно вісі як векторної величини. Як спрямовується вектор моменту сили відносно вісі?
5. Перелічити випадки, коли момент сили відносно вісі дорівнює нулю.
6. Що називають центральною гвинтовою віссю при зведенні довільної системи сил до силового гвинта (до динами)?
7. Перелічити статичні інваріанти системи сил.
8. Записати векторну та аналітичну форми умови рівноваги довільної системи сил.
9. Записати умови рівноваги невільного твердого тіла з однією та двома закріпленими точками.

1.6. ЦЕНТР ВАГИ ТВЕРДОГО ТІЛА

1.6.1. Центр паралельних сил

Розрізняють три типи векторів в механіці:

- ковзні; наприклад, сили, які діють на тверде тіло;
- вільні; наприклад, вектор-момент пари сил;
- прикладені до якоїсь точки прикладання; наприклад, сила ваги твердого тіла.

Особливий інтерес викликає система прикладених паралельних сил.

Центр паралельних сил – точка, через яку проходить лінія дії рівнодійної системи прикладених паралельних сил при будь-яких поворотах цих сил навколо їх точок прикладання в один і той же бік на один і той же кут.

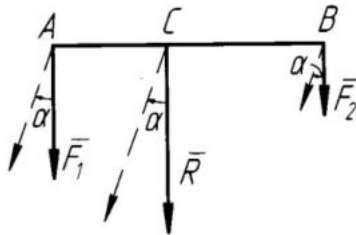


Рис.1

Представимо формули для визначення центру паралельних сил за рис.2.

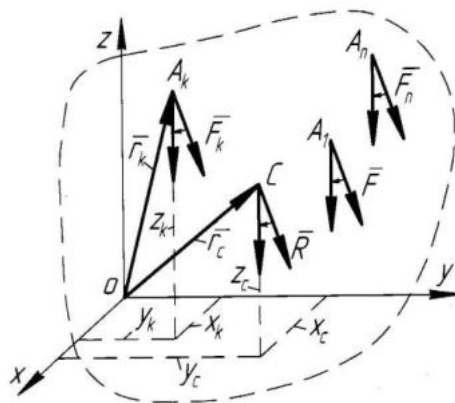


Рис.2

У відповідності до наслідку теореми Варіньона:

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{F}_k); \quad R \cdot x_C = \sum F_k \cdot x_k; \quad R = \sum_{k=1}^n F_k \neq 0.$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum F_k \cdot x_k}{\sum F_k}; \\ y_C &= \frac{\sum F_k \cdot y_k}{\sum F_k}; \\ z_C &= \frac{\sum F_k \cdot z_k}{\sum F_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Три формули для визначення центру паралельних сил можна об'єднати одним векторним рівнянням для визначення радіуса-вектора центру:

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{k=1}^n F_k \cdot \bar{r}_k}{R}. \quad (2)$$

1.6.2. Поняття та загальні формули координат центру ваги

Загальний випадок. Нехай $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ - вага частинок тіла, що утворюють систему прикладених паралельних сил. Центр C цієї системи називається центром ваги тіла, а рівнодійна

$\bar{P} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k$ являється силою ваги тіла.

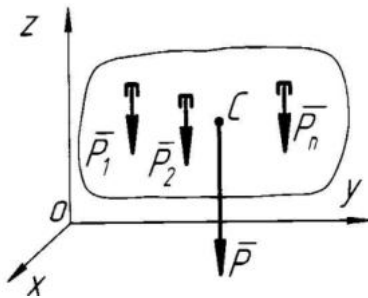


Рис.3

За рівняннями (1) маємо:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum P_k \cdot x_k}{\sum P_k}; \\ y_C &= \frac{\sum P_k \cdot y_k}{\sum P_k}; \\ z_C &= \frac{\sum P_k \cdot z_k}{\sum P_k}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Відповідно координати центру ваги для однорідного по об'єму тіла мають вид:

$$\left. \begin{aligned} P &= V \cdot \gamma; \\ \gamma &= const \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum V \cdot \gamma \cdot x}{\sum V \cdot \gamma} = \frac{\gamma \sum V \cdot x}{\gamma \sum V} = \frac{\sum V \cdot x}{\sum V}; \\ y_C &= \frac{\sum V \cdot y}{\sum V}; z_C = \frac{\sum V \cdot z}{\sum V}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для однорідної плоскої матеріальної фігури вага частин тіла пропорційна їх площам S_k (рис.4).

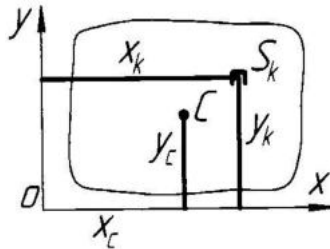


Рис.4

Тому координати центру ваги визначають за формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum S_k \cdot x_k}{\sum S_k}; \\ y_C &= \frac{\sum S_k \cdot y_k}{\sum S_k}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Оскільки вага частин лінії (дроту) пропорційна їх довжинам (рис.5), то для обчислення координат центру ваги однорідної матеріальної лінії використовують формули:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum l_k \cdot x_k}{\sum l_k}; \\ y_C &= \frac{\sum l_k \cdot y_k}{\sum l_k}; \\ z_C &= \frac{\sum l_k \cdot z_k}{\sum l_k}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

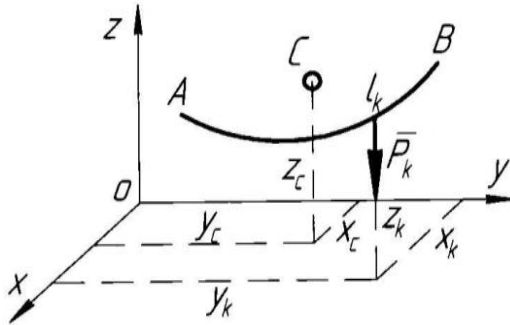
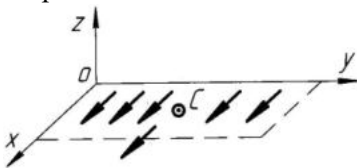


Рис.5

1.6.3. Центр ваги симетричного тіла. Визначення центрів ваги деяких однорідних тіл

Якщо точки прикладання паралельних сил розташовані в одній площині або на одній прямій, то центр ваги цієї системи паралельних сил розташований відповідно в тій же площині чи на тій же прямій.



а) площина Oxy ; усі $z_k = 0$. Тому

$$z_C = \frac{\sum F_k \cdot z_k}{\sum F_k} = 0, \text{ тобто точка } C$$

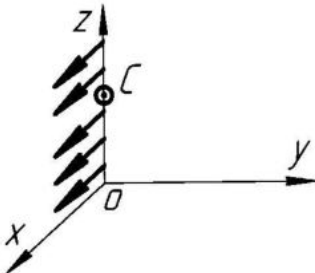
знаходиться у площині Oxy ;

б) вісь Oz ; маємо $x_k = 0$; $y_k = 0$.

$$\text{Тому: } x_C = \frac{\sum F_k \cdot x_k}{\sum F_k} = 0;$$

$$y_C = \frac{\sum F_k \cdot y_k}{\sum F_k} = 0,$$

тобто точка C знаходиться на вісі Oz .



Теорема. Якщо однорідне тіло має площину або вісь, або центр симетрії, то центр ваги такого тіла розташований в цій площині, на цій вісі або в цьому центрі симетрії:

а) пари елементарних частинок симетричні відносно площини симетрії. Одержимо систему паралельних сил $2\bar{P}_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) з точками прикладання в одній площині. Відповідно до леми центр C такої системи знаходиться в тій же площині.

б, в) аналогічно для тіл з віссю та центром симетрії.

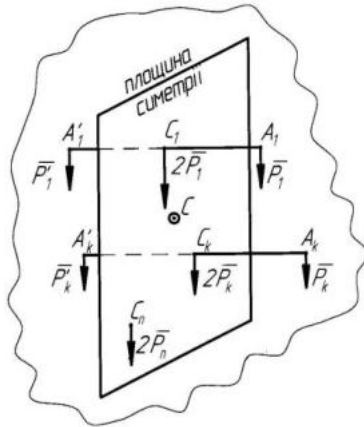


Рис.6

Розглянемо визначення центрів ваги деяких однорідних тіл.

Трикутник – однорідна плоска матеріальна фігура у формі трикутника. Центр ваги збігається з точкою перетину меридіан (рис.7), яка має наступні координати:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \\ y_C &= \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

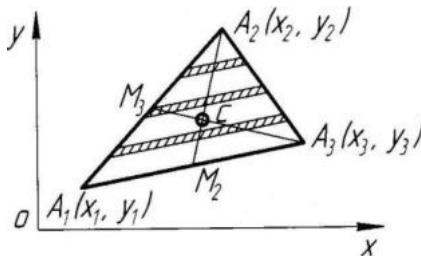


Рис.7

Багатокутник. Розіб'ємо багатокутник на трикутники (рис.8) та визначимо їх центри ваги. Потім за допомогою загальних формул отримуємо:

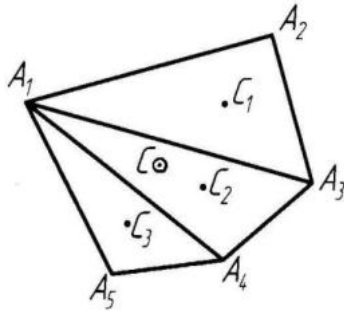


Рис.8

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3}{P_1 + P_2 + P_3}; \\ y_C &= \frac{P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3}{P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Інакше

$$x_C = \frac{\sum S \cdot x}{\sum S}; \quad y_C = \frac{\sum S \cdot y}{\sum S}.$$

Трапеція (рис.9). Нехай $AE = a; BD = b; h$.

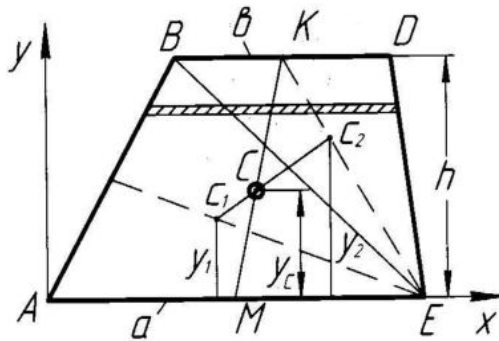


Рис.9

$$y_C = \frac{\sum S \cdot y}{\sum S} = \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2}{S_1 + S_2} = \frac{\frac{a \cdot h}{2} \cdot \frac{h}{3} + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3}h}{\frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \quad (9)$$

Призма (рис.10). Розглядаємо елементарні багатокутники рівної товщини. Задача зводиться до визначення центру ваги однорідного прямолінійного відрізка C_1C_2 , який з'єднує центри ваги основ, тобто всередині цього відрізка.

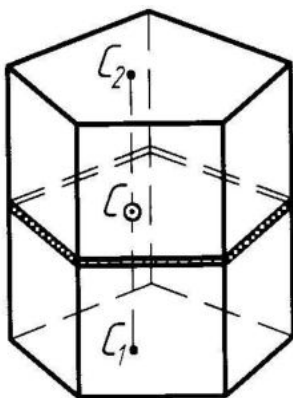


Рис.10

Аналогічно – для однорідного циліндру.

Піраміда (рис.11). Перетин A_1K та A_4L , де K та L - центри ваги трикутників.

$$\left. \begin{array}{l} LM = \frac{1}{3} A_1M; \\ MK = \frac{1}{3} A_4M. \end{array} \right\} \begin{array}{l} KL // A_1A_4; \\ \Delta A_1CA_4 \sim \Delta KCL \end{array} \left| \begin{array}{l} KL = \frac{1}{3} A_1A_4; \\ LC = \frac{1}{3} CA_4 = \frac{1}{4} A_4L. \end{array} \right.$$

Центр ваги піраміди на відрізку, що з'єднує вершину з центром ваги основи і відстоїть від цієї основи на $\frac{1}{4}$ цього відрізка.

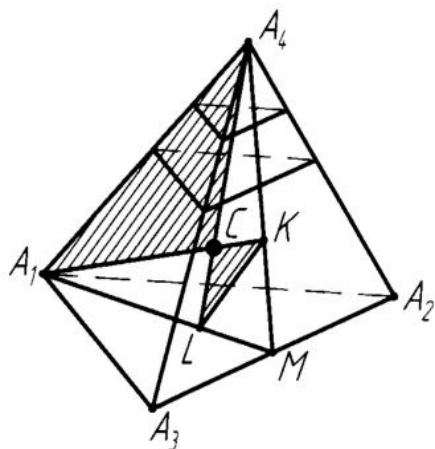


Рис.11

Аналогічно – для багатокутної піраміди та кругового конуса.

Дуга кола (рис.12). Позначаємо дугу $AB = l; h; R; \alpha$.

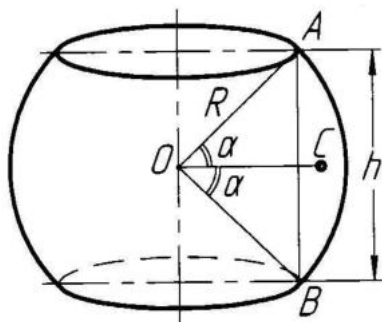


Рис.12

Площа кульового поясу (поверхні обертання):

$$\left. \begin{array}{l} S = 2\pi R \cdot h; \\ S = 2\pi \cdot OC \cdot l \end{array} \right\} \Rightarrow 2\pi R \cdot h = 2\pi \cdot OC \cdot l \Rightarrow OC = \frac{R \cdot h}{l} = \frac{R \cdot 2R \sin \alpha}{R \cdot 2\alpha}.$$

Отже,
$$OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (10)$$

Круговий сектор (рис.13). Центр ваги знаходиться на вісі симетрії. Центр ваги елементарних трикутників на відстані: $OA_1 = \frac{2}{3}R$. Тоді центр ваги однорідної дуги:

$$OC = OA_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (11)$$

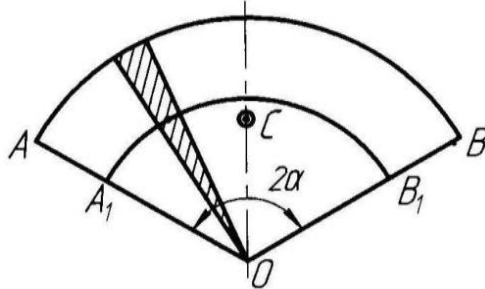


Рис.13

Півкуля (рис.14). Центр ваги знаходиться на вісі симетрії. Розіб'ємо півкулю на елементарні диски.

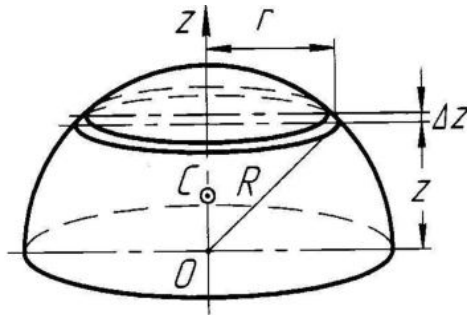


Рис.14

Координата $z_C = \frac{\lim \sum \Delta V \cdot z}{V}$ та об'єм $V = \frac{2}{3}\pi R^3$;

$$\lim \sum \Delta V \cdot z = \int_0^R \pi r^2 \cdot z \cdot dz = \int_0^R \pi (R^2 - z^2) z \cdot dz = \pi R^2 \int_0^R z \cdot dz - \pi \int_0^R z^3 \cdot dz = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Після підстановки:

$$z_C = \frac{\pi R^4 \cdot 3}{4 \cdot 2 \pi R^3} = \frac{3}{8} R. \quad (12)$$

Контрольні запитання

1. Які три типи векторів використовують в механіці.
2. Записати формули для визначення центру паралельних сил в координатній та векторній формах.
3. Записати формули для обчислення координат центру ваги:
 - а) для однорідного по об'єму тіла;
 - б) однорідної плоскої матеріальної фігури;
4. Сформулювати теорему про визначення центру ваги тіл з віссю та центром симетрії.
5. Визначення центрів ваги деяких однорідних тіл: а) трикутника; б) трапеції; в) однорідного циліндру; г) піраміди; д) півкулі.

Розділ 2. КІНЕМАТИКА

2.1. ВСТУП ДО КІНЕМАТИКИ. КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

2.1.1. Предмет кінематики. Основні поняття

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчають механічний рух матеріальних тіл незалежно від сил, що діють на ці тіла, тобто без розгляду причин, які впливають на рух.

В курсі теоретичної механіки вивчають рух матеріальної точки та твердого тіла. Відповідно кінематику розділяють на кінематику матеріальної точки та кінематику твердого тіла.

Механічний рух – одна з форм руху матерії. Рух матеріального об'єкту завжди необхідно розглядати відносно якогось твердого тіла, що називають тілом відліку, тобто рух є відносним. З тілом відліку скріплюють систему осей координат, наприклад прямокутних xOz , приймаючи її за систему відліку, відносно якої розглядається рух об'єкту. Системою відліку для трьохмірного евклідова простору не може слугувати одна точка, лінія чи площина, а повинні бути три осі, не обов'язково прямолінійні, але які не належать одній площині.

Рух матеріальних тіл відбувається в просторі з перебігом часу. Простір в класичній механіці вважають евклідовим, що не залежить від часу та рухомих в ньому матеріальних об'єктів. Час в кінематиці виконує роль незалежної змінної величини, є універсальним та не зв'язаний з простором. Незалежність часу від руху означає, що в усіх системах відліку, які довільно рухаються одне відносно іншого, час однаковий, якщо за початок відліку вибрано загальну для них подію.

Основна задача кінематики матеріальної точки полягає в визначенні її положення відносно заданої системи координат та характеру її руху в будь-який момент часу.

До основних кінематичних характеристик руху точки належать:

а) траєкторія точки – геометричне місце її послідовних положень в просторі з перебігом часу відносно заданої системи відліку; в залежності від виду траєкторії рух точки поділяють на прямолінійний та криволінійний, плоский та просторовий;

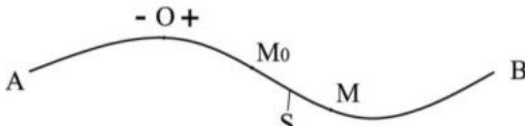


Рис.1

б) дугова координата $S = \cup OM$, за якою визначають відстань та пройдений шлях за траєкторією (рис.1);
 в) швидкість точки;
 з) прискорення точки.

Існують три способи задання руху точки:

а) при векторному способі задання руху точки її положення визначається кінцем радіуса-вектора відносно деякої фіксованої точки, наприклад O (рис.2),

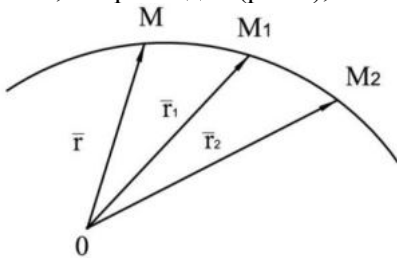


Рис.2

причому цей вектор є векторною функцією часу $\vec{r} = \vec{F}(t)$.

Відповідно траєкторією точки є годограф радіуса-вектора \vec{r} , якщо змінний вектор в різні моменти часу відкладають від спільної точки O ;

б) при координатному способі положення точки в будь-який момент часу визначається її координатами у вибраній системі координат (декартовій, сферичній, циліндричній, полярній тощо), яка незмінно зв'язана з тілом відліку. Вважають рух заданим, якщо відомі координати точки як неперервні, двічі диференційованні функції часу, тобто задані рівняння руху точки, наприклад, в декартових координатах: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, які повністю визначають положення та параметри руху точки;

в) при натуральному способі задання руху задаються траєкторія та закон руху точки за траєкторією $S = f(t)$, а також точка, яку приймають за початок відліку відстаней.

2.1.2. Швидкість та прискорення точки при векторному способі задання її руху

Положення рухомої точки M відносно прийнятої системи відліку визначається в момент часу t радіусом-вектором \vec{r} , який з'єднує

нерухому точку O з цією точкою (рис.3).

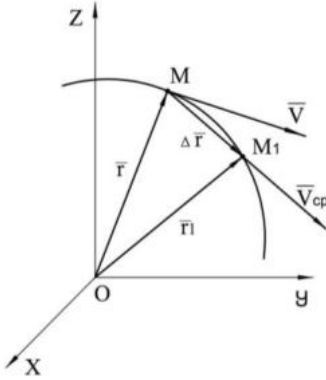


Рис.3

В деякий момент часу $t_1 = t + \Delta t$ рухома точка прийме положення M_1 , яке визначається її радіусом-вектором \bar{r}_1 . За час Δt радіус-вектор рухомої точки зміниться на $\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r} = \overline{MM_1}$.

Середня швидкість точки за час

$$\Delta t: \bar{V}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}; \text{ тоді швидкість}$$

точки в даний момент часу (миттєва швидкість):

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (1)$$

Таким чином, швидкість точки дорівнює першій похідній за часом від її радіуса-вектора.

Вектор швидкості спрямований по дотичній до траєкторії в напрямку її руху. Годографом вектора називають геометричне місце його кінців, якщо змінний вектор в різні моменти часу відкладають від спільного центру O_1 . На рис.4 та 5 показані вектори швидкості точки в різні моменту часу та годограф вектора швидкості.

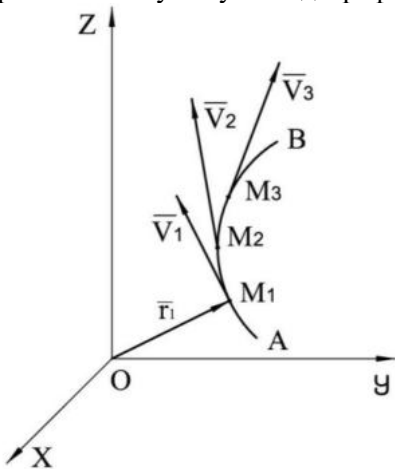


Рис.4

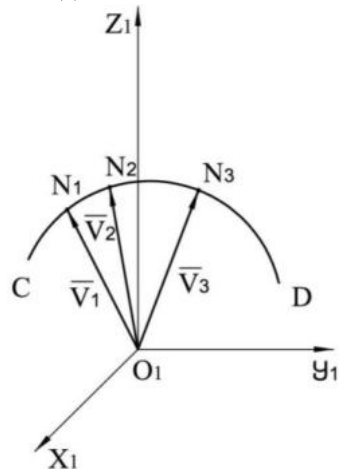


Рис.5

Нехай рухома точка в момент часу t має швидкість \vec{V} , а в момент часу $t_1 = t + \Delta t$ відповідно \vec{V}_1 (рис.6). Для визначення приросту швидкості $\Delta\vec{V}$ за час Δt переносимо вектор швидкості \vec{V}_1 паралельно самому собі в місце прикладання вектора \vec{V} . Середнє прискорення точки за час Δt : $\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}$;

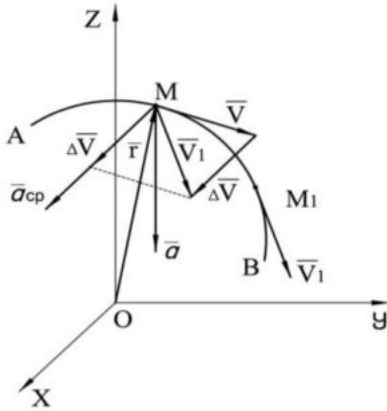


Рис.6

прискорення точки в даний момент часу (миттєве прискорення):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (2)$$

Таким чином, прискорення точки дорівнює першій похідній за часом від швидкості точки або другій похідній за часом від її радіуса-вектора.

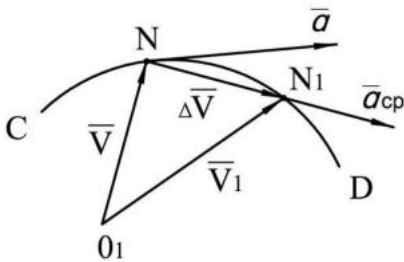


Рис.7

Розглядаємо напрямок вектора прискорення точки (рис.7). Приріст швидкості $\Delta\vec{V}$ та відповідно середнє прискорення спрямовані всередину вгнутості траєкторії, як і їх граничні значення при $\Delta t \rightarrow 0$.

Тому вектор прискорення точки також спрямовано всередину вгнутості траєкторії та по дотичній до годографа швидкості.

2.1.3. Траєкторія та швидкість точки при координатному способі задання її руху

Рух точки в декартових координатах вважається заданим, якщо відомі координати точки як неперервні, двічі диференційовані функції

часу, тобто задані рівняння руху точки в декартових координатах:
 $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

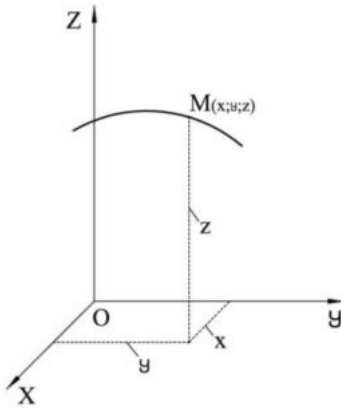


Рис.8

Рівняння руху точки в декартових координатах повністю визначають рух точки: дозволяють знайти положення точки, її швидкість та прискорення в будь-який момент часу. Ці рівняння також є рівняннями траєкторії точки в параметричній формі. Виключаючи спільний параметр t , одержуємо рівняння траєкторії, що зв'язує координати її точок:

з першого рівняння $t = \varphi(x)$, при підстановці в інші $y = f_2[\varphi(x)]$ та $z = f_3[\varphi(x)]$. У випадку руху точки на площині маємо $x = f_1(t)$ та $y = f_2(t)$, звідки $t = \varphi(x)$ та $y = f_2[\varphi(x)]$ або $F(x, y) = 0$ - рівняння траєкторії точки.

Координати x , y та z дорівнюють проекціям радіуса-вектора \vec{r} . Використовуючи формулу розкладання вектора на координатні осі, маємо:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}.$$

За визначенням векторної швидкості:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \vec{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{k}.$$

Розкладаємо вектор \vec{V} на координатні осі:

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}.$$

Порівнюючи складові при одиничних ортах отримуємо:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{dx}{dt} = f_1'(t) = \dot{x}; \\ V_y &= \frac{dy}{dt} = f_2'(t) = \dot{y}; \\ V_z &= \frac{dz}{dt} = f_3'(t) = \dot{z}. \end{aligned} \tag{3}$$

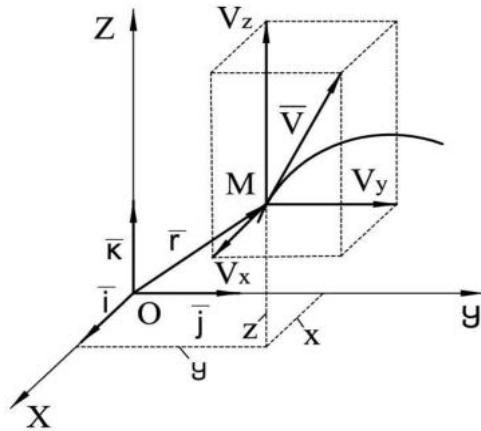


Рис.9

Проекції швидкості точки на будь-яку координатну ось дорівнює першій похідній по часу від відповідної координати цієї точки.

За проекціями швидкостей визначають числове значення (модуль) швидкості та косинуси кутів вектора швидкості з осями координат

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \quad (4)$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (5)$$

Розглянемо окремі випадки руху матеріальної точки.

Рух точки в площині (рис.10):

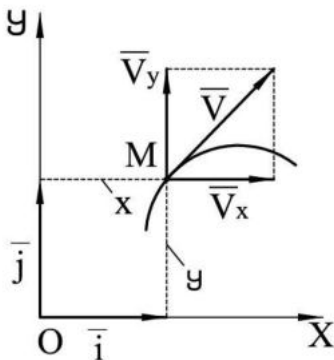


Рис.10

- рівняння руху:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t);$$

- проекції швидкості:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t) = \dot{x};$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t) = \dot{y};$$

- модуль швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

- напрямок вектора швидкості:

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}.$$

Прямолінійний рух точки (рис.11):

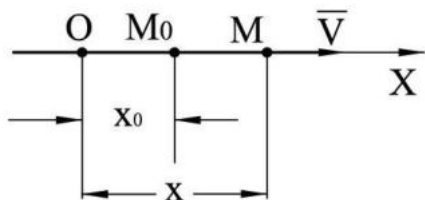


Рис. 11

- рівняння руху $x = f(t)$;

- проекція швидкості:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = f'(t) = \dot{x};$$

- модуль швидкості $V = |V_x|$;

- напрямок вектора швидкості визначається знаком проекції V_x .

Прямолінійний рівномірний рух точки: додаткова умова $\bar{V} = const$;
 $V_x = V = \frac{dx}{dt}$; $dx = Vdt$. Після інтегрування та підстановки початкових умов отримуємо:

$$\begin{cases} x = x_0 + V \cdot t; \\ S = S_0 + V \cdot t. \end{cases}$$

Перше рівняння – в координатній формі, друге – в природній.

2.1.4. Прискорення точки при координатному способі завдання її руху

Представляємо вектор швидкості за його проекціями (рис.12)

$$\bar{V} = V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}.$$

Прискорення точки у відповідності до визначення:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(V_x \cdot \bar{i} + V_y \cdot \bar{j} + V_z \cdot \bar{k}) = \frac{dV_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \cdot \bar{k} = \ddot{x} \cdot \bar{i} + \ddot{y} \cdot \bar{j} + \ddot{z} \cdot \bar{k},$$

а прискорення, яке представлено за його проекціями на координатні осі:

$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}.$$

Порівнюючи складові при ортах маємо:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f_1''(t) = \ddot{x};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = f_2''(t) = \ddot{y};$$

$$a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = f_3''(t) = \ddot{z}.$$

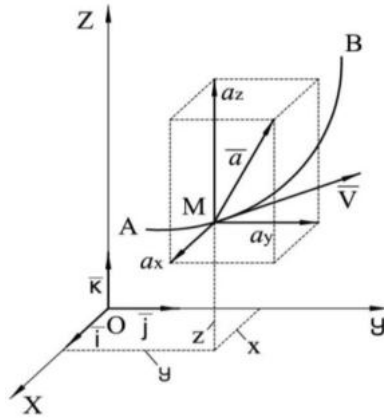


Рис.12

Проекції прискорення точки на координатні осі дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості точки або другим похідним відповідних координат рухомої точки по часу.

За проекціями прискорень визначають числове значення (модуль) прискорення та косинуси кутів вектора прискорення з осями координат:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}; \quad (6)$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{j}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\vec{a}, \vec{k}) = \frac{a_z}{a}. \quad (7)$$

Окремі випадки.

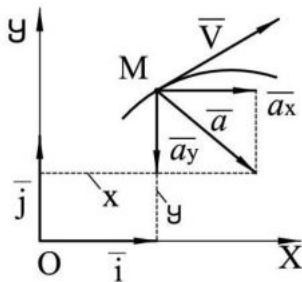


Рис.13

Рух точки в площині (рис.13):

- рівняння руху: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$;

- проекції прискорень:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = f_1''(t) = \ddot{x};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = f_2''(t) = \ddot{y};$$

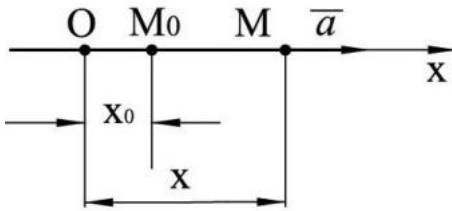
- модуль прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

- напрямок вектора прискорення:

$$\cos(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{a_y}{a}.$$

Прямолінійний рух точки (рис.14):



- рівняння руху: $x = f(t)$;

- проекція прискорення:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

- модуль прискорення:

$$a = |a_x|;$$

Рис.14

- напрямок вектора прискорення визначається знаком a_x (при $a_x > 0$ - рух прискорений та вектори \bar{V} та \bar{a} співпадають за напрямком, при $a_x < 0$ - рух сповільнений та вектори \bar{V} та \bar{a} протилежні за напрямком).

Прямолінійний рівно змінний рух точки: додаткова умова $\bar{a} = const$; $a_x = \frac{dV_x}{dt} \Rightarrow a = \frac{dV}{dt} = const$, де a та V - алгебраїчні величини; $dV = a dt$.

Після інтегрування та підстановки початкових умов:

$$V = V_0 + a \cdot t;$$

$$\begin{cases} x = x_0 + V_0 \cdot t + at^2 / 2; \\ S = S_0 + V_0 \cdot t + at^2 / 2. \end{cases}$$

Перше рівняння руху – в координатній формі, друге – в природній. Формули руху тіла, що вільно падає (рис.15).

Дано: $x = h$; $a = g = 9,81 \text{ м/с}^2 = const$;

початкові умови: $x_0 = 0$, $V_0 = 0$.

Після підстановки в рівняння рівно прискореного руху маємо

$$\begin{cases} V = g \cdot t; \\ h = \frac{1}{2} g t^2. \end{cases} \Rightarrow t = \frac{V}{g} \Rightarrow h = \frac{1}{2} g \frac{V^2}{g^2} = \frac{V^2}{2g} \Rightarrow V = \sqrt{2gh} -$$

формула Галілея.

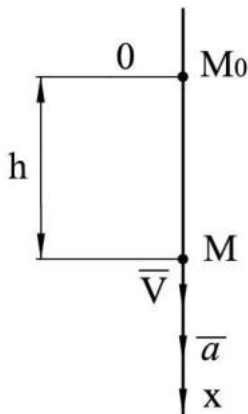


Рис.15

2.1.5. Закон руху та швидкість точки за природним способом задання руху

За природним способом задають траєкторію (або її легко встановити) та закон руху за траєкторією $s = f(t)$ (рис.16). За координатним способом закони руху мають вид $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

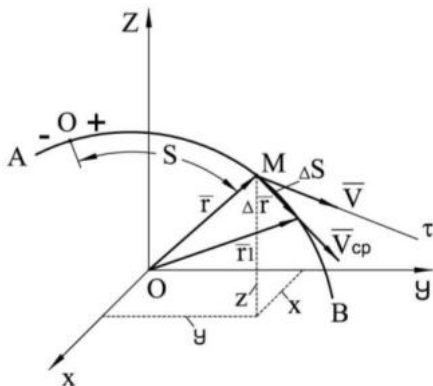


Рис.16

Із диференціальної геометрії відомо, що $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, звідки:

$$s - s_0 = \pm \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad \text{або} \quad s = s_0 \pm \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt.$$

За визначенням середньої швидкості точки векторним способом:

$$\bar{V}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

а з урахуванням $\bar{r}(s)$ маємо:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right) = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau}.$$

$$\text{Отже } \bar{V} = \frac{ds}{dt} \cdot \bar{\tau}.$$

Проектуючи на дотичну, отримуємо:

$$V = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

Таким чином, проекція швидкості точки на дотичну (алгебраїчна швидкість) дорівнює похідній дугової координати по часу.

Тоді можна записати, що $\bar{V} = V \cdot \bar{\tau}$

Виконаємо перехід від координатного способу до природного:

$$\left. \begin{array}{l} x = f_1(t); \\ y = f_2(t); \\ z = f_3(t); \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} V_x = \frac{dx}{dt}; \\ V_y = \frac{dy}{dt}; \\ V_z = \frac{dz}{dt}; \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}; \\ V = \frac{ds}{dt}; \\ ds = V dt; \end{array} \right\} s = s_0 + \int_0^t V dt$$

При природному способі задання руху використовують природний тригранник (рис.17).

Прилегла (стична) площина – границя площини $\pi M \tau_1$ при $M_1 \rightarrow M (\Delta s \rightarrow 0)$.

Нормальна площина – перпендикулярна $\bar{\tau}$ та нормалі \bar{n} .

Спрямляюча площина.

Природними є три взаємно перпендикулярні вісі:

а) дотична – напрямок у бік зростання дугової координати s ; $\bar{\tau}$ – орт дотичної;

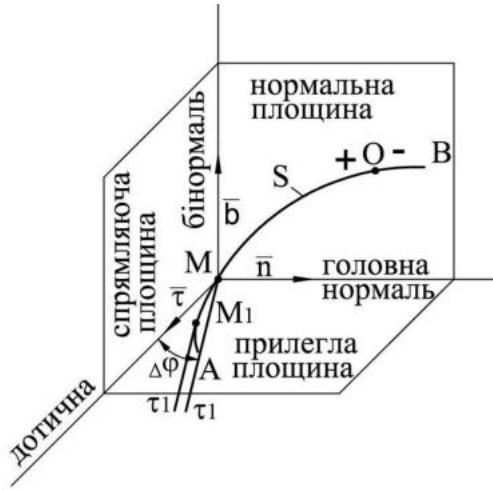


Рис.17

б) головна нормаль – напрямок у бік угнутості траєкторії; \bar{n} - орт головної нормалі;

в) бінормаль – напрямок визначається її ортом $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$.

Природні вісі – рухома система координат, центр якої знаходиться в рухомій точці M .

Введемо поняття (рис.18) кута суміжності $\Delta\varphi$, середньої кривизни траєкторії $K_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ на дільниці $\Delta s = \cup MM_1$. Тоді границею є кривизна траєкторії в точці:

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

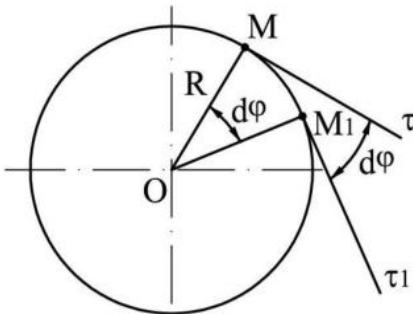


Рис.18

Величина, яка обернена до кривизни, називається радіусом кривизни траєкторії в даній

$$\text{точці } M \quad \rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Якщо $\rho = MC$, то точка C - центр кривизни.

Розглянемо окремі випадки:

а) прямолінійна траєкторія:

$$\Delta\varphi=0; \quad K=0; \quad \rho=\frac{1}{k}=\infty;$$

б) траєкторією є коло:

$$K=\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{Rd\varphi}=\frac{1}{R}=\text{const}; \quad \rho=R=\text{const};$$

в) траєкторія сталої кривизни.

2.1.6. Дотичне та нормальне прискорення точки

Враховуючи, що швидкість точки $\bar{V} = \dot{S} \cdot \bar{\tau} = V_{\tau} \cdot \bar{\tau}$, у відповідності до визначення прискорення $\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{S} \cdot \bar{\tau}) = \ddot{S} \cdot \bar{\tau} + \dot{S} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}$. Перша складова $\ddot{S} \cdot \bar{\tau}$ спрямована по дотичній, друга $\dot{S} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}$ має напрямок вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$. Встановлюємо напрямок вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ (рис.19).

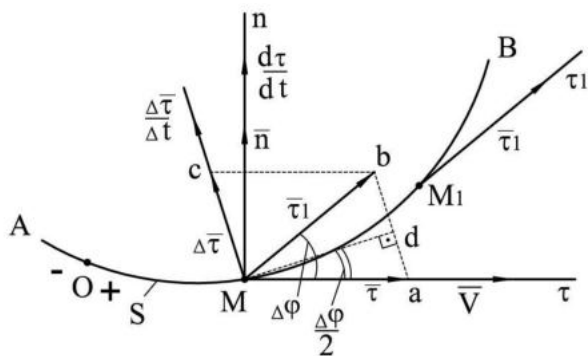


Рис.19

Представляємо $\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta t}$, де $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau} + \Delta\bar{\tau}$ та

$\Delta\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 - \bar{\tau} = \overline{MC} \Rightarrow$ вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ розташований в границі площині $\tau M \tau_1$, тобто в прилеглий площині. Визначаємо границю $\angle Amc$;

$$\angle Mab = \angle Mba = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \angle aMc = \Delta\varphi + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2} \text{ та}$$

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \angle aMc = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, тобто вектор $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$ розташований у

нормальній площині та спрямований по головній нормалі.

Визначаємо модуль та кінцеву формулу вектора $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$. Оскільки

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta t}; \quad \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta t} = ad = Ma \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2}; \quad \Delta\tau = 2Ma \cdot \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi/2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = 1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot V = \frac{V}{\rho}.$$

Таким чином,
$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{V}{\rho} \bar{n}.$$

Представимо формулу розкладання прискорення на природні осі.

Враховуючи, що
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{S} \cdot \bar{\tau}) = \ddot{S} \cdot \bar{\tau} + \dot{S} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt}$$

та $\ddot{S} \cdot \bar{\tau} = \frac{dV}{dt} \cdot \bar{\tau}$, $\dot{S} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt} = V \cdot \frac{V}{\rho} \bar{n} = \frac{V^2}{\rho} \bar{n}$, маємо:
$$\bar{a} = \frac{dV}{dt} \cdot \bar{\tau} + \frac{V^2}{\rho} \bar{n}.$$

Таким чином, прискорення \bar{a} розташоване в прилеглий площині (рис.20).

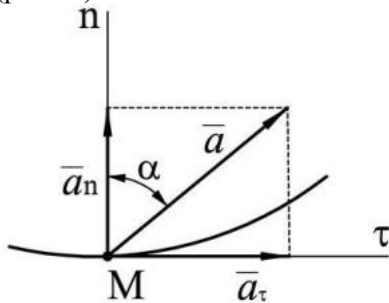


Рис.20

Розглядаємо кожну із складових

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \cdot \bar{\tau} \text{ та } \bar{a}_n = \frac{V^2}{\rho} \bar{n}$$

окремо.

Враховуємо, що
$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Проекції, модуль та напрямок прискорення визначаються за формулами:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{S} = f''(t); \quad (8)$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho}; \quad a_b = 0; \quad (9)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n}. \quad (10)$$

Розглядаємо окремі випадки:

а) прямолінійний рух $\rho = \infty \Rightarrow a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{\infty} = 0;$

$$a = a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

б) рівномірний криволінійний рух $V = \text{const} \Rightarrow a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0;$

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

в) рівномірний прямолінійний рух: $\bar{V} = \text{const}, \rho = \infty \Rightarrow a_\tau = 0, a_n = 0 \Rightarrow a = 0.$

Висновок: \bar{a}_τ характеризує зміну \bar{V} за модулем, а \bar{a}_n - за напрямком.

Приклад

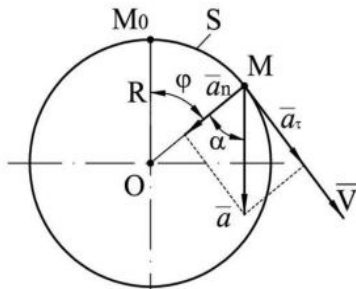


Рис.21

Дано: $R = 4\text{м}; S = 4,5t^3;$

$V = 6\text{м/с}$

Визначити: прискорення a

Розв'язування

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow S_0 = 0; \\ V = \frac{dS}{dt} = 13,5t^2; \end{cases}$$

$$t = \sqrt{\frac{V}{13,5}} = \sqrt{\frac{6}{13,5}} = \frac{2}{3}\text{с}; S = 4,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{3}\text{м}; \varphi = \frac{S}{R} = \frac{1}{3}\text{рад.} \cong 19^\circ.$$

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ м/с}^2; \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(13,5t^2) = 27t = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63,5^\circ.$$

Контрольні запитання

1. Що вивчають в кінематиці?
2. Які способи задання руху точки використовуються в кінематиці?
3. Назвати спосіб задання руху точки при законі: $r = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$ або $\bar{r} = \bar{F}(t)$.
4. Назвати спосіб задання руху точки, при якому прискорення точки визначається за формулою $a = \sqrt{\dot{V}^2 + (V^2 / \rho)^2}$.
5. Як визначають швидкість точки при координатному способі задання її руху на площині?
6. Як визначають прискорення точки при координатному способі задання її руху на площині?
7. Як визначають прискорення точки при природному способі задання її руху на площині?
8. Назвати прискорення точки, яке характеризує зміну її швидкості за напрямком нормальним прискоренням.
9. В якому випадку криволінійного руху точки вектор повного прискорення утворює з вектором швидкості тупий кут?
10. Чому у випадку криволінійного руху точки навіть при $V = \text{const}$ вектор повного прискорення цієї точки не дорівнює нулю?
11. Як визначається прискорення точки при природному способі задання її руху на площині?
12. Назвати прискорення точки, яке характеризує зміну її швидкості за модулем
13. Записати формули для визначення прискорення точки при координатному способі задання руху на площині.
14. Записати формули для визначення прискорення точки при природному способі задання руху на площині.
15. Чим є траєкторія точки при векторному способі задання руху точки?

2.2. ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТА ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

2.2.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, що незмінно зв'язана з тілом, залишається паралельною своєму початковому положенню.

Приклади поступального руху:

- а) прямолінійний рух вагону;
- б) прямолінійний рух повзуна (рис.1, а);
- в) криволінійний рух спарника AB паровоза (рис.1, б);

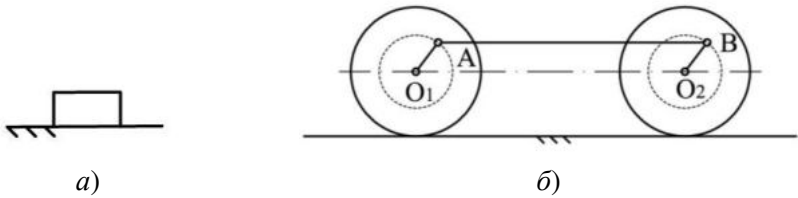


Рис.1

- г) просторовий рух крейди або олівця.

Таким чином, поступальний рух може бути прямолінійним, в площині та просторовим.

Поступальний рух характеризує наступна теорема (рис.2): при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії і в будь-який момент часу мають однакові за модулем та напрямком швидкості та прискорення.

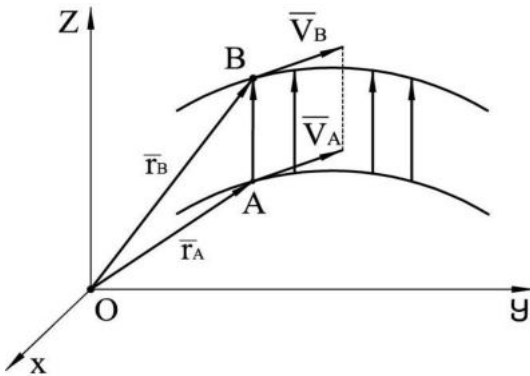


Рис.2

Доказ

а) $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}$; вектор $\vec{AB} = const$, тобто точки A і B описують однакові траєкторії, які зсунуті одна відносно одної на величину \vec{AB} .

$$б) \frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{v}_A.$$

$$в) \frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} \Rightarrow \vec{a}_B = \vec{a}_A.$$

Висновок: поступальний рух твердого тіла буде цілком визначеним, якщо відомий рух тільки однієї будь-якої його точки. Тому вивчення поступального руху тіла зводиться до вивчення кінематики точки.

2.2.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Рух твердого тіла, при якому принаймні дві будь-які його точки (наприклад, A та B) залишаються нерухомими, називається обертальним.

Лінія AB , що проходить через ці точки називається віссю обертання.

Трасекторії точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є кола з центрами на цій вісі. На рис.3 Π_1 - нерухома площина, Π_2 - рухома площина, яка жорстко зв'язана з тілом, та визначає положення тіла в просторі з перебігом часу t двогранним кутом φ .

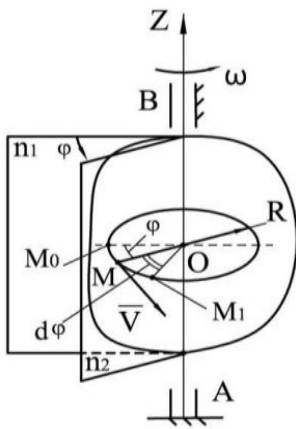


Рис.3

Тоді $\varphi = f(t)$ - рівняння (закон) обертального руху тіла.

Обертальний рух тіла характеризують кутова швидкість ω та кутове прискорення ε .

Середня кутова швидкість за проміжок часу Δt :

$$\omega_{\text{сеп}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t). \quad (1)$$

Миттєва кутова швидкість (в будь-який момент часу) дорівнює першій похідній по часу від кута повороту в цей момент. Розмірність ω - [рад/с].

Кутова швидкість ω є додатною при обертанні тіла проти годинникової стрілки, оскільки кут повороту φ зростає з перебігом часу, та від'ємним – при обертанні тіла за ходом годинникової стрілки, оскільки кут повороту при цьому зменшується. На розрахункових схемах кутову швидкість ω показують дуговою стрілкою навколо осі обертання. Дугова стрілка ω вказує напрямок обертання тіла.

Окремий випадок – рівномірне обертання: $\omega = const \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt$, після інтегрування та підстановки початкових умов отримуємо $\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$. При $\varphi_0 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\varphi}{t}$.

В техніці кутову швидкість задають частотою обертання в обертах за хвилину. За 1 хвилину тіло повернеться на кут $2\pi n$, де n - число обертів за хвилину,

$$\text{тоді } \omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}, \text{ де } \omega - \text{ в [рад/с], } n - \text{ в [об./хв.]}. \quad (2)$$

За проміжок часу Δt середнє кутове прискорення становить $\varepsilon_{сеп} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Тоді миттєве кутове прискорення:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{сеп} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f''(t). \quad (3)$$

Миттєве кутове прискорення (в будь-який момент часу) дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту по часу в цей момент. Розмірність ε - [рад/с²].

Якщо $\varepsilon > 0$, то кутова швидкість зростає та відповідно в даний момент часу тіло обертається прискорено в додатному напрямку (проти годинникової стрілки), якщо $\varepsilon < 0$, то кутова швидкість зменшується, тіло обертається сповільнено в від'ємному напрямку (за ходом годинникової стрілки).

Окремий випадок – рівно змінний рух тіла при $\varepsilon = const$.

Враховуючи, що $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \varepsilon dt$, після інтегрування та

підстановки початкових умов маємо $\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$. Враховуючи, що

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon \cdot t \Rightarrow d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon \cdot t \cdot dt$ та після інтегрування і

підстановки початкових умов отримуємо $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \varepsilon t^2 / 2$.

Якщо початкові умови дорівнюють нулю, тобто $\begin{cases} \varphi_0 = 0; \\ \omega_0 = 0; \end{cases}$ маємо:

$$\begin{cases} \omega = \varepsilon \cdot t; \\ \varphi = \varepsilon t^2 / 2. \end{cases}$$

2.2.3. Швидкість та прискорення точок обертального руху твердого тіла

Визначаємо модуль та напрямок швидкості. Оскільки довжина дуги (рис.4) $S = R \cdot \varphi$, то швидкість $V = \frac{dS}{dt} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$.

Остаточно, $V = R \cdot \omega$. (4)

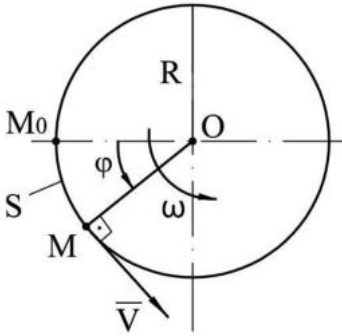


Рис.4

Швидкість точки тіла при обертанні навколо нерухомої осі дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання точки.

Вектор швидкості \vec{V} перпендикулярний до радіуса обертання в площині, яка перпендикулярна осі обертання, в напрямку обертання.

Визначимо складові прискорення (рис.5).

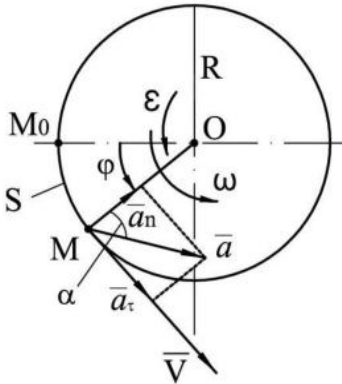


Рис.5

Повне прискорення дорівнює векторній сумі складових прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad (5)$$

де \vec{a}_τ , \vec{a}_n - дотичне та нормальне прискорення точки.

Модуль дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(R \cdot \omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon, \quad \text{остаточно } a_\tau = R \cdot \varepsilon. \quad (6)$$

Дотичне прискорення точки дорівнює добутку кутового прискорення тіла на радіус обертання точки. Дотичне прискорення також називають обертальним.

Модуль нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2, \quad \text{остаточно } a_n = R \cdot \omega^2. \quad (7)$$

Нормальне прискорення точки дорівнює добутку квадрату кутової швидкості на швидкості на радіус обертання точки. Нормальне прискорення

також називають доцентровим.

Напрямки векторів прискорень за наступними правилами:

а) вектор дотичного прискорення \vec{a}_τ перпендикулярний до радіуса обертання в площині, яка перпендикулярна осі обертання, в напрямку обертання при прискореному русі та протилежно – при сповільненому;

б) вектор нормального прискорення \vec{a}_n спрямовується по нормалі до траєкторії у бік вгнутості, тобто по радіусу до осі обертання.

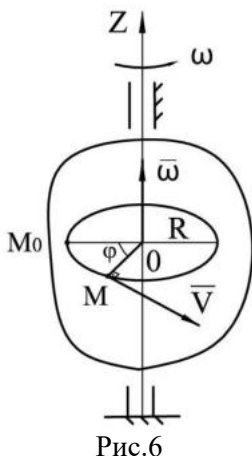
Оскільки вектори $\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$, то при додаванні векторів за правилом паралелограма: $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot R)^2 + (\omega^2 \cdot R)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$,

остаточно $a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. (8)

Напрямок вектора \vec{a} визначається кутом α між вектором \vec{a} та радіусом обертання точки R , а саме

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (9)$$

2.2.4. Векторні формули швидкості та прискорень точок тіла при його обертальному русі



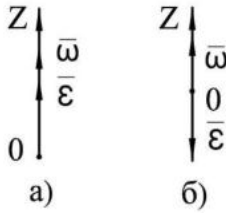
Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ визначається трьома факторами:

- положенням осі обертання тіла;
- напрямом обертання тіла;
- величиною кутової швидкості.

Вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ є ковзний, спрямований вздовж осі обертання таким чином, щоб з кінця вектора бачити обертання тіла проти ходу годинникової стрілки (за правилом правого гвинта).

$$\text{Його модуль } \omega = |\vec{\omega}| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Аналогічно для кутового прискорення: вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ є ковзний, спрямований вздовж осі обертання таким



чином, що при прискореному русі збігається з напрямком вектора $\vec{\omega}$ (на рис.7, а) та протилежно – при сповільненому (на рис.7, б).

$$\text{Модуль } \varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \left| \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|.$$

Рис.7

Складемо векторну формулу швидкості точки тіла при його обертальному русі.

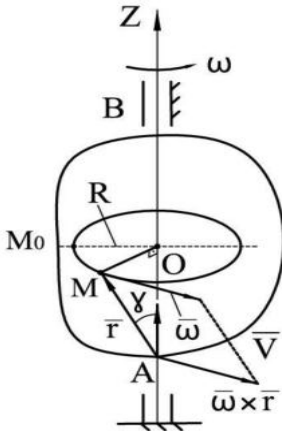


Рис.8

За рис.8

$$\begin{cases} \vec{V} \perp \text{ площині } \triangle OMA; \\ V = \omega \cdot R. \end{cases}$$

Окрім того,

$\vec{\omega} \times \vec{r} \perp \text{ площині } \triangle OMA$ та

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \sin \gamma = \omega \cdot R.$$

Таким чином, \vec{V} та $\vec{\omega} \times \vec{r}$ співпадають за модулем та напрямком.

$$\text{Отже, } \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (10)$$

Висновок: швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла та радіус-вектора точки відносно будь-якого центру на осі тіла, що обертається.

В якості радіуса-вектора \vec{r} можна використовувати вектор \vec{OM} , який спрямований з точки O в точку M .

Складемо векторні формули прискорень точок при обертальному русі тіла.

Векторна формула для повного прискорення. За визначенням векторного прискорення $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$. Враховуючи, що $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, маємо:

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}.$$

З іншого боку $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$. Доведемо, що $\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ та $\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}$.

Представимо дотичне прискорення як вектор (рис.9).

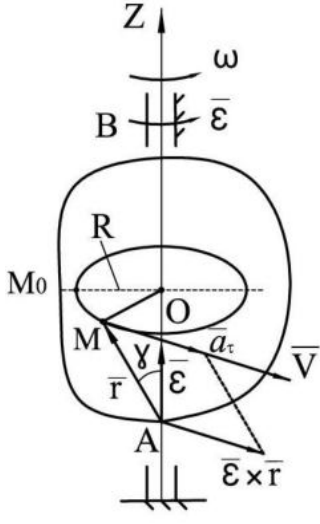


Рис.9

За рис.9 $\begin{cases} \bar{a}_\tau \perp \text{площині } \triangle OMA; \\ \bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \cdot R. \end{cases}$

Окрім того, $\bar{\varepsilon} \times \bar{r} \perp \text{площині } \triangle OMA$ та

$$|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon \cdot r \sin \gamma = \varepsilon \cdot R.$$

Таким чином, \bar{a}_τ та $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ співпадають за модулем та напрямком.

$$\text{Отже, } \bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}. \quad (11)$$

Висновок: дотичне прискорення точки тіла при його обертальному русі дорівнює векторному добутку кутового прискорення та радіуса-вектора точки відносно будь-якого центру на осі обертання.

В якості радіуса-вектора \bar{r} можна використовувати вектор \overline{OM} , який спрямований з точки O в точку M .

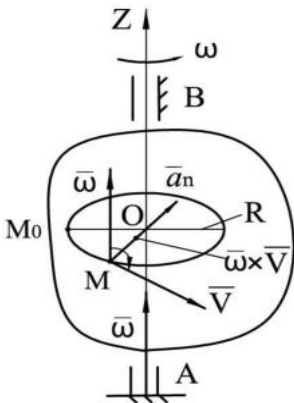


Рис.10

Нормальне прискорення як векторний добуток. За рис.10 \bar{a}_n спрямовується по радіусу MO до центру обертання, модуль $a_n = \omega^2 \cdot R$.

Окрім того, вектор $\bar{\omega} \times \bar{V}$ - по радіусу до центра та $|\bar{\omega} \times \bar{V}| = \omega \cdot V \sin 90^\circ = \omega \cdot \omega R = \omega^2 R$.

Таким чином, \bar{a}_n та $\bar{\omega} \times \bar{V}$ співпадають за модулем та напрямком.

$$\text{Отже, } \bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{V}. \quad (12)$$

Висновок: нормальне прискорення точки тіла при його обертальному русі дорівнює векторному добутку кутової швидкості тіла та швидкості точки.

2.2.5. Передача обертального руху

Передачі з обертальним рухом призначені для перетворення обертального руху відносно однієї осі в обертальний рух відносно іншої.

Існують два способи передачі обертання:

а) передача безпосереднім дотиком коліс – в фрикційних, зубчастих передачах;

б) передача гнучкою в'яззю – в пасовій, ланцюговій, канатній передачах.

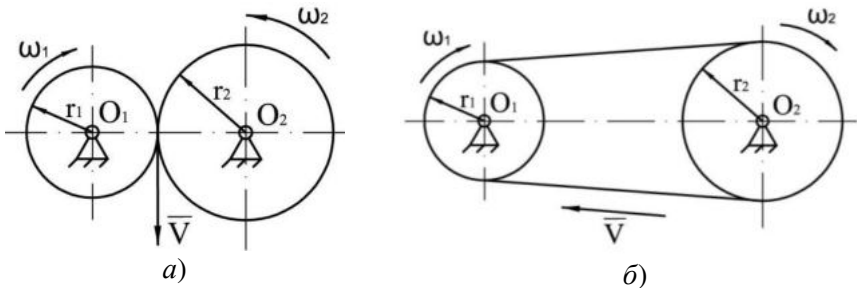


Рис.11

Для передачі обертального руху використовують передаточні механізми. Вал механізму, який передає рух називається ведучим, а інший, який сприймає – веденим. Швидкості на обох коліс рівні між собою: $V = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$.

Тоді передаточне число $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$. Враховуючи, що число зубів

Z_i в відповідній передачі пропорційне радіусам R_i коліс, очевидно, що

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (13)$$

тобто кутові швидкості коліс обернено пропорційні їх радіусам або кількості зубів на колесах.

Визначення: передаточне число i дорівнює відношенню кутової швидкості ведучого колеса до кутової швидкості веденого колеса.

Зубчасті передачі поділяють на два види з'єднання. Послідовне зубчасте з'єднання (рис.12):

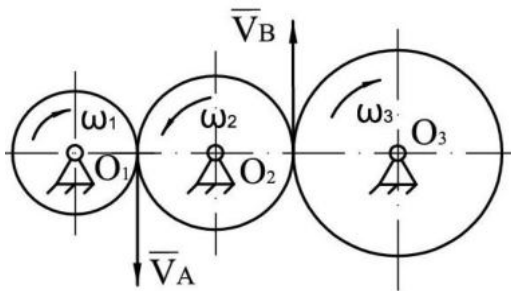


Рис.12

для коліс 1 та 2:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1};$$

для коліс 2 та 3:

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Тоді для коліс 1, 2 та 3:

$$i_{12} \cdot i_{23} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_1}.$$

Отже,
$$i_{13} = \frac{R_3}{R_1}. \quad (14)$$

Висновок: передаточне відношення послідовного зубчастого з'єднання дорівнює оберненому відношенню радіусів коліс та не залежить від радіусів проміжних коліс, які називають "паразитними".

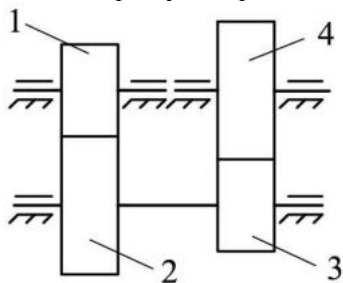


Рис.13

Ступінчасте з'єднання (рис.13):

для коліс 1 та 2:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2};$$

для коліс 3 та 4:

$$i_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4}.$$

Загальне передаточне відношення дорівнює добутку окремих передаточних відношень:

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} = \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_3}. \quad (15)$$

Приклад 1. Передача за допомогою зубчастого редуктора.

Дано: $n_1 = 800$ об./хв.; $Z_1 = 12$; $Z_2 = 60$; $Z_3 = 20$; $Z_4 = 80$

Визначити: n_4

Розв'язок
Маємо
$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} = \frac{Z_2 \cdot Z_4}{Z_1 \cdot Z_3} = \frac{60 \cdot 80}{12 \cdot 20} = 20. \quad \text{За визначенням}$$

передаточного відношення $i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{n_1}{n_4}$, звідки $n_4 = \frac{n_1}{i_{14}} = \frac{800}{20} = 40$ об./хв.

Приклад 2. Шків *B* машини приводиться в рух за допомогою пасової передачі від шківа *A* парової машини (рис.14).

Дано: $R_1 = 75$ см; $R_2 = 30$ см; $\varepsilon_1 = 0,4\pi$ рад./с²; $\omega_0 = 0$ (стан спокою);

$$n_2 = 300 \text{ об./хв.}$$

Визначити: час розгону t

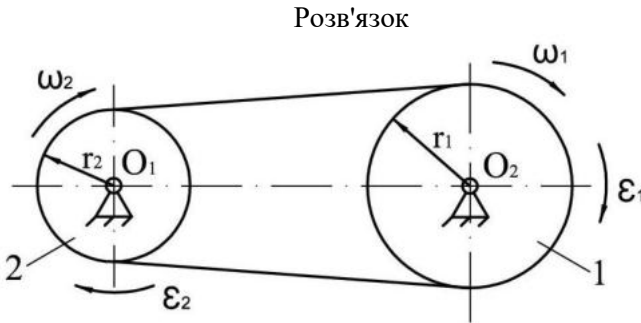


Рис.14

Колові швидкості ободів шківів $V = \omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2$, звідки

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{\pi n_2}{30} \cdot \frac{R_2}{R_1} = \frac{\pi \cdot 300 \cdot 30}{30 \cdot 75} = 4\pi \text{ рад./с.}$$

З рівняння рівноприскореного обертального руху з початковими умовами:

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \cdot t, \text{ звідки } t = \frac{\omega_1}{\varepsilon_1} = \frac{4\pi}{0,4\pi} = 10 \text{ с.}$$

Контрольні запитання

1. Охарактеризувати обертальний рух тіла, якщо вектор дотичного (обертального) прискорення спрямовано протилежно напрямку вектора швидкості точки.

2. Охарактеризувати обертальний рух тіла, якщо вектор кутової швидкості збігається за напрямком з вектором кутового прискорення.

3. Як розподіляються швидкості та прискорення точок при поступальному русі тіла?

4. Записати рівняння рівномірного обертального руху тіла навколо нерухомої осі.

5. Записати рівняння кутової швидкості та кута повороту тіла при рівнозмінному обертанні навколо нерухомої осі.

6. Охарактеризувати обертальний рух тіла навколо нерухомої осі, якщо дотичне (обертальне) прискорення дорівнює нулю.

7. Як визначається кутова швидкість тіла, в яких одиницях вимірюється?

8. Як визначається кутове прискорення тіла, в яких одиницях вимірюється?

9. Як визначається модуль повного прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

10. Записати формулу для визначення вектора швидкості будь-якої точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

11. Охарактеризувати обертальний рух тіла, якщо вектор дотичного (обертального) прискорення спрямовано протилежно напрямку вектора швидкості точки.

12. Прискорення яких точок тіла, що обертається:

а) рівні за модулем;

б) співпадають за напрямком;

в) рівні за модулем та співпадають за напрямком.

13. Як спрямовуються вектори кутової швидкості та кутового прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі?

14. Записати векторні вирази колової швидкості, дотичного та нормального прискорення.

15. Що є передаточним числом передачі та як визначається передаточне число складної передачі?

2.3. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

2.3.1. Поняття відносного, переносного та абсолютного рухів точки

Рух точки називається складним, якщо точка одночасно бере участь в двох та більше рухах. Приклади: човен на річці з течією, рухомий пасажир на пароплаві, рух каменю по кулісі.

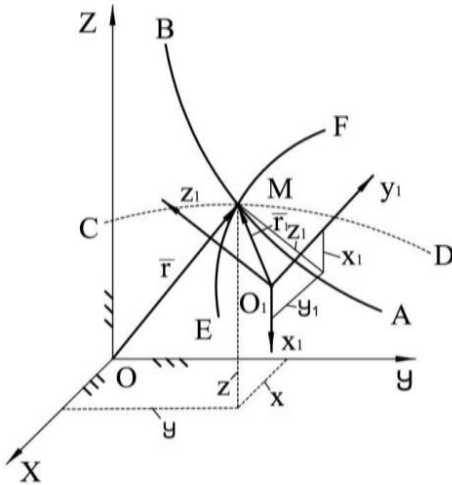


Рис.1

Рух рухомої системи та всіх незмінно зв'язаних з нею точок відносно нерухомої системи називається переносним рухом. Траєкторія точки CD , що незмінно зв'язана з рухомими осями з якою в даний момент збігається точка, що рухається, називається переносною траєкторією.

Абсолютний рух точки – рух точки відносно нерухомої системи координат. Також називають складним, складеним або результируючим. Абсолютний рух точки є результатом складання (додавання) складових рухів: відносного та переносного.

При складному русі точки розглядають дві задачі кінематики:

- пряму – з відомих параметрів відносного та переносного рухів визначити абсолютний рух (траєкторію, швидкість, прискорення);
- обернену – розкладання складного руху на складові.

Розглядаємо дві системи координат(рис.1):

а) нерухома система координат $Oxyz$;

б) рухома система координат $O_1x_1y_1z_1$, відносно якої рухається точка M .

Рух точки M відносно рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$ називається відносним рухом. Траєкторія AB при цьому русі є відносною траєкторією.

2.3.2. Швидкості та прискорення точки в складному русі точки

Швидкості та прискорення точки в складному русі точки (рис. 1а).

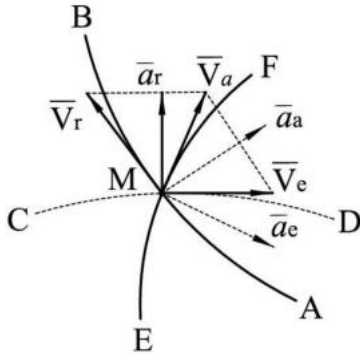


Рис. 1а

Абсолютною швидкістю \bar{V}_a називається швидкість точки в її абсолютному русі, тобто в русі по відношенню до нерухомої системи відліку $Oxyz$.

Абсолютне прискорення \bar{a}_a точки – її прискорення в абсолютному русі.

Відносною швидкістю \bar{V}_r точки називається її швидкість в відносному русі по відношенню до рухомої системи координат $O_1x_1y_1z_1$. Величина, що характеризує зміну швидкості тільки в її відносному русі, називається відносним прискоренням \bar{a}_r точки.

Швидкість точки, що незмінно зв'язана з рухомими осями, з якою в даний момент збігається рухома точка, називається переносною швидкістю \bar{V}_e , а прискорення цієї точки – переносним прискоренням \bar{a}_e . Прискорення \bar{a}_e характеризує тільки ту зміну швидкості \bar{V}_e , яка відбувається внаслідок тільки переносного руху.

Приклад складного руху точки в площині (рис.2).

Дано: параметри переносного руху точки $\varphi(t)$, $OM = r$; параметри відносного руху $S(t)$, $\rho(S)$.

Визначити: швидкості та прискорення переносні \bar{V}_e і \bar{a}_e та відносні \bar{V}_r і \bar{a}_r

Розв'язок

При переносному русі точка M належить пластині, яка обертається навколо нерухомої осі, що проходить через точку O , тому переносною траєкторією є коло з радіусом r : швидкість:

$$V_e = R \cdot \omega = r \cdot \frac{d\varphi}{dt};$$

$\bar{V}_e \perp OM$ в напрямку дугової стрілки кутової швидкості ω (вважаємо, що $\omega = \frac{d\varphi}{dt} > 0$, тобто напрямки дугових стрілок ω та φ збігаються);

$$\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau;$$

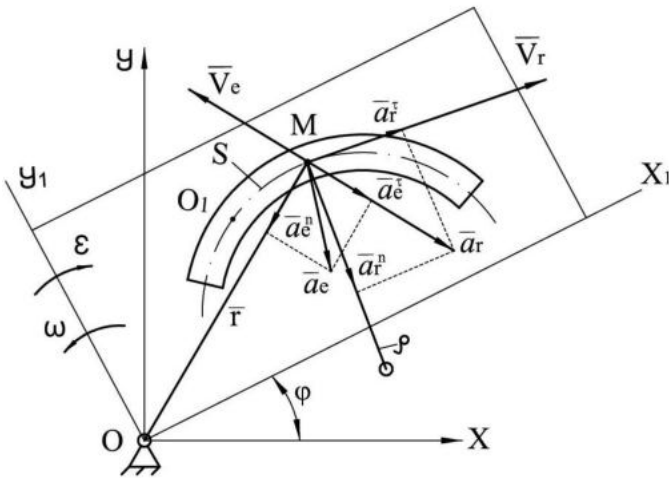


Рис.2

нормальне прискорення $a_e^n = \omega^2 \cdot R = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot r$; \bar{a}_e^n - вздовж радіуса до центру обертання (від M до O);

дотичне прискорення $a_e^\tau = \varepsilon \cdot R = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot r$; $\bar{a}_e^\tau \perp OM$ в напрямку

дугової стрілки кутового прискорення ε (вважаємо, що $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} < 0$, тобто напрямки дугових стрілок ω та ε протилежні та рух сповільнений).

При відносному русі точка M рухається по пластині за криволінійною траєкторією з відліком в точці O_1 та з радіусом кривизни ρ в її положенні M :

- відносна швидкість $V_r = \frac{dS}{dt}$; \vec{V}_r спрямований по дотичній до траєкторії в напрямку руху;
- повне відносне прискорення: $\vec{a}_r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$;
- нормальне прискорення $a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho} = \frac{(\frac{dS}{dt})^2}{\rho}$; \vec{a}_r^n - вздовж радіуса кривизни до центру);
- дотичне прискорення $a_r^\tau = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$; вважаємо, що відносний рух точки прискорений, тобто вектори \vec{V}_r та \vec{a}_r^τ співпадають за напрямком.

2.3.3. Додавання швидкостей при складному русі точки

Формула додавання швидкостей. За проміжок часу Δt маємо (рис.3)

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_{nep} + \overline{M''M_1}, \text{ де } \overline{M''M_1} = \Delta \vec{r}_{vidn}.$$

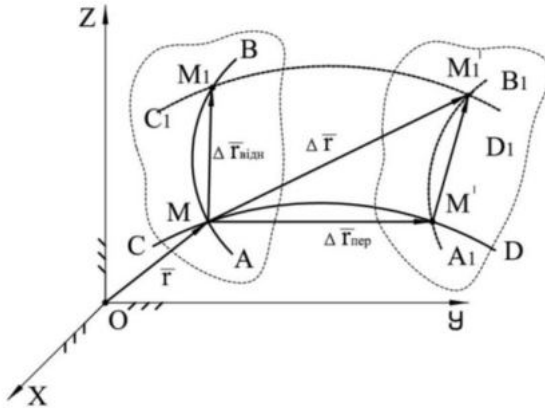


Рис.3

Далі:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{nep}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{nep}}{dt} + \frac{d\vec{r}_{vidn}}{dt}$$

або

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (1)$$

Теорема додавання швидкостей: абсолютна швидкість точки при її складному русі дорівнює векторній сумі її переносної та відносної швидкостей.

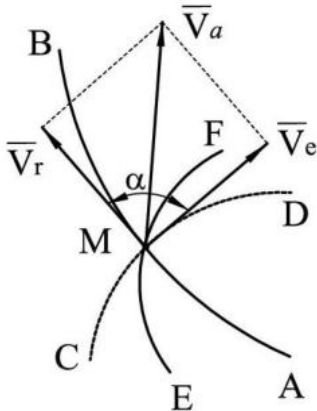


Рис.4

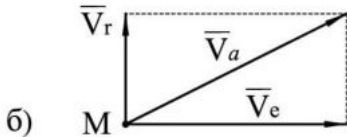
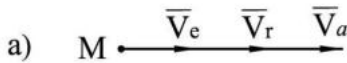


Рис.5

Інакше – за законом паралелограма швидкостей (рис.4): абсолютна швидкість точки при її складному русі за модулем та напрямком визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах переносної та відносної швидкостей.

Модуль абсолютної швидкості в загальному випадку, коли швидкості переносного та відносного рухів не перпендикулярні, маємо:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos \alpha}. \quad (2)$$

Окремі випадки (рис.5):

а) $\alpha = 0 \Rightarrow V_a = V_e + V_r$;

б) $\alpha = 90^\circ \Rightarrow V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$;

в) $\alpha = 180^\circ \Rightarrow V_a = |V_e - V_r|$.

Розглядаємо визначення швидкості точки в полярних координатах (рис.6).

Дано: $\varphi = f_1(t)$; $r = f_2(t)$

Визначити: V .

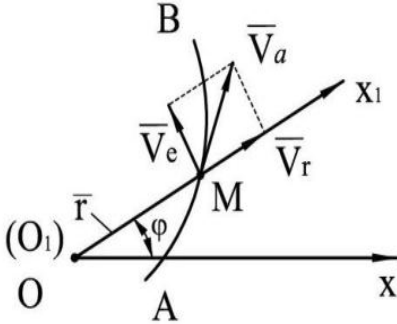


Рис.6

Розв'язок

Швидкість точки $\bar{V} = \bar{V}_e + \bar{V}_r$,
де переносна швидкість
 $V_e = R \cdot \omega = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$; $\bar{V}_e \perp OM$ в
напрямку переносного обертання;
відносна швидкість $V_r = \frac{dr}{dt}$; \bar{V}_r
вздовж осі Ox_1 . Оскільки $\bar{V}_e \perp \bar{V}_r$,
то $\alpha = 90^\circ \Rightarrow V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$.

Приклад. Визначення ширини Дніпра

Дано: $t_1 = 20$ хв.; $t_2 = 25$ хв.; $h = 240$ м

Визначити: ширину $l = AB$, відносну V_r та переносну V_e швидкості.

Розв'язок

$$\left. \begin{aligned} l &= V_r \cdot t_1; \\ h &= V_e \cdot t_1; \\ l &= V_2 \cdot t_2 = \sqrt{V_r^2 - V_e^2} \cdot t_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow V_e = \frac{h}{t_1} = \frac{240}{20} = 12 \text{ м/хв.}$$

$$V_r \cdot t_2 = \sqrt{V_r^2 - V_e^2} \cdot t_2;$$

$$V_r^2 \cdot t_2^2 = V_r^2 \cdot t_2^2 - V_e^2 \cdot t_2^2 \Rightarrow V_r = \frac{V_e \cdot t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \frac{12 \cdot 25}{\sqrt{25^2 - 20^2}} = 20 \text{ м/хв.}$$

Остаточню $l = V_r \cdot t_1 = 20 \cdot 20 = 400$ м.

2.3.4. Додавання прискорень точки. Теорема Коріоліса

Теорема Коріоліса - теорема про додавання прискорень в загальному випадку: якщо переносний рух точки не є поступальним, то її абсолютне прискорення при складному русі дорівнює векторній сумі відносного і переносного прискорень та прискорення Коріоліса, тобто:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c. \quad (3)$$

Останній доданок в формулі (3) називають прискоренням Коріоліса

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r. \quad (4)$$

Прискорення Коріоліса (поворотне) дорівнює подвоєному векторному добутку переносної кутової швидкості та відносної швидкості точки.

Прискорення Коріоліса характеризує:

а) зміну модуля та напрямку переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху;

б) зміну напрямку відносної швидкості точки внаслідок обертального переносної руху.

Модуль прискорення Коріоліса визначається за формулою

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\hat{\omega}, \hat{V}_r). \quad (5)$$

Випадки, коли прискорення Коріоліса відсутнє, тобто $a_c = 0$:

а) якщо вектор $\bar{\omega}_e = 0$, тобто в випадку переносного поступального руху або в моменти, коли кутова швидкість не поступального переносного руху дорівнює нулю;

б) якщо відносна швидкість $\bar{V}_r = 0$, тобто у випадку відносного спокою або в момент зміни напрямку відносного руху;

в) якщо $\sin(\hat{\omega}, \hat{V}_r) = 0$ або $\sin(\hat{\omega}, \hat{V}_r) = \pi$, тобто, коли вектори $\bar{\omega}_e$ та \bar{V}_r є паралельними.

Напрямок вектора прискорення Коріоліса \bar{a}_c встановлюють двома способами:

а) за правилом векторного добутку: прискорення Коріоліса \bar{a}_c спрямовують по перпендикуляру до площини векторів $\bar{\omega}_e$ та \bar{V}_r в той бік, звідки поворот вектора $\bar{\omega}_e$ до вектора швидкості \bar{V}_r на найменший кут видно в напрямку проти ходу годинникової стрілки;

б) за правилом Жуковського: для визначення напрямку коріолісового прискорення \bar{a}_c необхідно спроектувати вектор відносної швидкості точки на площину, яка перпендикулярна осі переносного обертання, та повернути цю проекцію в тій же площині на 90° в бік переносного обертання.

Окремі випадки.

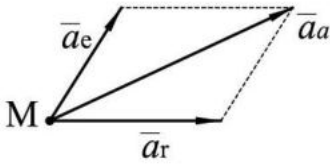


Рис.7

векторній сумі відносного та переносного прискорень. Інше формулювання: якщо переносний рух точки є поступальним, то її абсолютне прискорення за модулем та напрямком визначається діагоналлю паралелограму, який побудований на векторах переносного та відносного прискорень точки.

Рух точки в площині – на прикладі каменя куліси (рис.8).

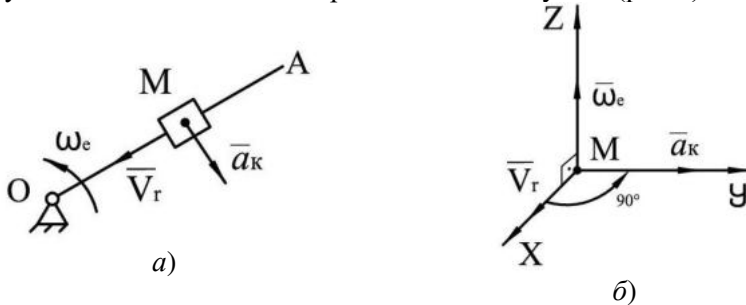


Рис.8

Для точки M каменю (рис.8, а) модуль прискорення:

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin(\hat{\omega}, \vec{V}_r) = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ = 2\omega_e V_r.$$

У випадку складного руху точки в площині для визначення напрямку прискорення Кориоліса необхідно взяти вектор відносної швидкості \vec{V}_r точки та повернути його на 90° в напрямку переносного обертання (рис.8, б).

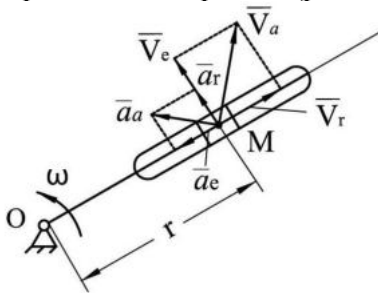


Рис.9

Приклад (рис.9)

Дано: $\omega = const$; $V_r = const$; $MO = r$

Визначити: $V_a(r)$; $a_a(r)$

Розв'язок

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r;$$

$$V_e = \omega \cdot r; \quad V_r = const;$$

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}.$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_a &= \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c ; \\ a_r &= \frac{dV_r}{dt} = 0 \text{ при } V_r = \text{const} ; \\ a_e &= a_e^n = \omega^2 \cdot r ; \quad a_c = 2\omega \cdot V_r . \\ a_a &= \sqrt{a_e^2 + a_c^2} . \end{aligned}$$

Контрольні запитання

1. Дати визначення складного руху точки.
2. На які рухи розкладається складний рух точки?
3. Дати визначення відносного, переносного та абсолютного рухів точки, а також швидкостей та прискорень цих рухів.
4. Сформулювати теорему про додавання швидкостей точки при її складному русі.
5. Записати формулу для визначення абсолютної швидкості точки при її складному русі.
6. Сформулювати закон паралелограма швидкостей точки при її складному русі.
7. Сформулювати теорему Коріоліса про додавання швидкостей точки при її складному русі.
8. Назвати причини появи прискорення Коріоліса.
9. В чому полягає закон Бера?
10. Записати скалярну форму модуля прискорення Коріоліса.
11. Перелічити умови при яких прискорення Коріоліса дорівнює нулю.
12. Визначити абсолютне прискорення точки при поступальному переносному русі та при не поступальному переносному русі.
13. Чому дорівнює модуль прискорення Коріоліса у випадку поступального переносного руху, тобто при $\omega_e = 0$?
14. Чому дорівнює модуль прискорення Коріоліса у випадку відносного спокою точки, тобто при $V_r = 0$?
15. Який вид має вираз абсолютного прискорення точки у випадку, коли переносний рух представляє собою вільний рух твердого тіла, та у випадку, коли переносний рух є обертанням навколо нерухомої осі?

2.4. ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.4.1. Складний плоский рух тіла

Рух твердого тіла, при якому всі його точки рухаються в площинах, паралельних даній нерухомій площині, називається плоско - паралельним або плоским рухом.

Приклади плоского руху тіла:

а) рух конуса по нерухомій площині з одночасним обертанням навколо власної осі (рис.1, а);

б) кочення колеса по рейці без тертя вздовж прямої лінії (рис.1, б);

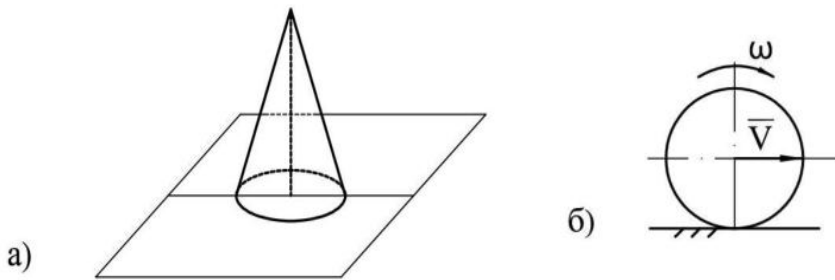


Рис.1

в) рух шатуна AB в кривошипно-повзунковому механізмі.

Розглядаємо зведення плоско-паралельного руху тіла до руху плоскої фігури у своїй площині (рис.2).

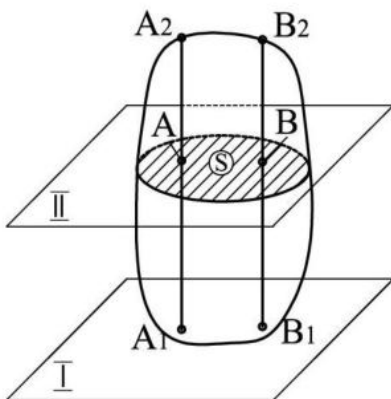


Рис.2

Фігура S залишається весь час у площині II. Точки A та B перерізу S тіла рухаються так само, як і всі точки відповідно відрізків A_1A_2 та B_1B_2 , які перпендикулярні площинам I та II.

Отже, вивчення плоского руху тіла зводиться до вивчення руху плоскої фігури S у своїй площині.

Розглядаємо дві системи координат (рис.3): нерухому xOy та рухому x_1Ay_1 , яка жорстко зв'язана з тілом, центр координат якої в точці A називають полюсом.

Висновок: при не поступальному переміщенні плоскої фігури в своїй площині, її рух можна представити як сукупність двох складових переміщень: поступального переміщення плоскої фігури разом з полюсом та повороту навколо полюса.

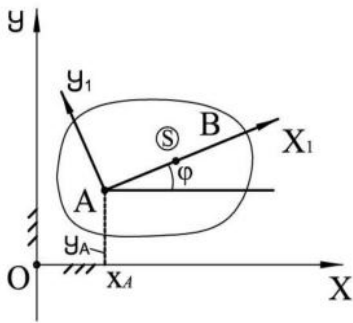


Рис.3

Рух плоскої фігури в її площині, а відповідно, і рух всього тіла визначається трьома рівняннями плоско-паралельного руху твердого тіла:

$x_A = f_1(t)$; $y_A = f_2(t)$; $\varphi = f_3(t)$,
де перші два рівняння характеризують поступальну складову руху тіла разом з полюсом A , а третє – обертання навколо полюса A .

Окремі випадки (рис.4):

а) $x_{O_1} = const$; $y_{O_1} = const$ - зводиться до обертального руху тіла, наприклад, кривошипну O_1A ;

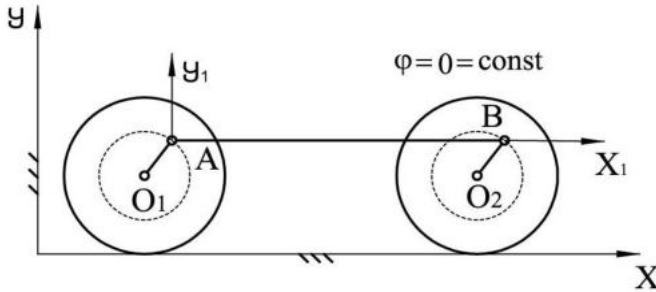


Рис.4

б) $\varphi = const$ - зводиться до плоского поступального руху тіла, наприклад, спарника AB паровозу;

в) $\varphi = const$; $y_A = const$ - зводиться до прямолінійного поступального руху, наприклад, руху повзуна.

2.4.2. Розкладання плоского руху тіла на поступальний та обертальний рухи

Розглядаємо дві системи координат (рис.5): нерухому xOy та систему $\eta A\xi$ з осями незмінного напрямку, які паралельні нерухомим осям xOy і які рухаються поступально разом з точкою A .

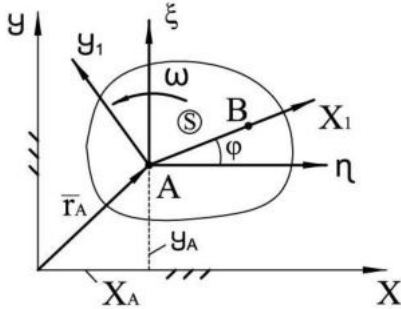


Рис.5

Отже, плоский рух тіла розкладається на два простих:

а) переносний поступальний рух разом з осями $\eta A\xi$ (разом з полюсом A) відповідно до рівнянь

$$\bar{r}_A = \bar{F}(t) \text{ або } \begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t), \end{cases}$$

б) відносного обертального руху навколо полюса A за рівнянням $\varphi = f_3(t)$.

Швидкість переносного поступального руху:

- в векторній формі - векторна похідна від радіуса-вектора:

$$\bar{V}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt};$$

- в координатній – за допомогою проекцій швидкості на координатні осі:

$$\begin{cases} V_{Ax} = \frac{dx_A}{dt} = f_1'(t); \\ V_{Ay} = \frac{dy_A}{dt} = f_2'(t); \end{cases} \Rightarrow \text{модуль } V_A = \sqrt{V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2} \text{ та}$$

напрямок

$$\begin{cases} \cos(\bar{V}_A, \hat{x}) = \frac{V_{Ax}}{V_A} \\ \cos(\bar{V}_A, \hat{y}) = \frac{V_{Ay}}{V_A} \end{cases}.$$

Таким чином, швидкість переносного поступального руху залежить від вибору полюса та визначається його рухом.

Кутова швидкість відносного обертального руху визначається за

формулою $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'_3(t)$.

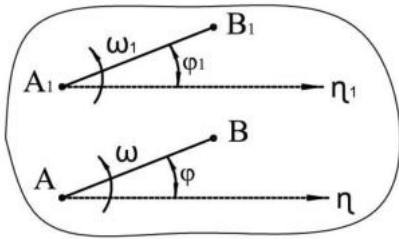


Рис.6

Прийемо (рис.6) за полюс іншу точку – наприклад, точку A_1 , причому $A_1B_1 \parallel AB$ (за весь час руху).

Очевидно, що

$$\varphi_1 = \varphi \Rightarrow \omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega$$

$$\text{та } \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Таким чином, кутова швидкість та кутове прискорення при відносному обертальному русі не залежать від вибору полюса.

2.4.3. Швидкості точок плоскої фігури

Розглядаємо швидкість точки плоскої фігури як векторну суму двох швидкостей (рис.7).

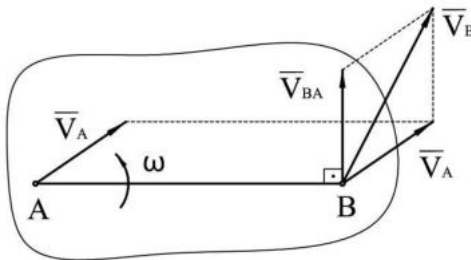


Рис.7

У відповідності до теореми про додавання двох швидкостей виду:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r$$

для плоско-паралельного руху (при заданих V_A та ω) маємо:

$$\bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA},$$

де $\bar{V}_B = \bar{V}_{Ba}$ - абсолютна швидкість точки B ;

$\bar{V}_{Be} = \bar{V}_A$ - складова переносної швидкості точки B при поступальному русі тіла разом з полюсом A ;

$\bar{V}_{Br} = \bar{V}_{BA}$ - складова відносної швидкості точки B при обертальному русі тіла навколо полюса A (модуль: $V_{BA} = \omega \cdot AB$; напрямок: $\bar{V}_{AB} \perp AB$).

Висновок: швидкість будь-якої точки плоскої фігури, що рухається в своїй площині, дорівнює векторній сумі двох швидкостей: переносної поступальної разом з довільно вибраним полюсом та

відносної обертальної навколо цього полюса.

При визначенні швидкостей точок важільних механізмів з плоско-паралельним рухом ланок доцільно використовувати теорему про проекції швидкостей двох точок тіла: проекції швидкостей двох точок тіла при його плоскому русі на пряму, що з'єднує ці точки, являються рівними між собою.

Векторне рівняння $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ проектуємо на ось Ax : $V_{Bx} = V_{Ax} + V_{BAx}$. Оскільки $\vec{V}_{BA} \perp Ax$, то $V_{BAx} = 0$ та маємо $V_{Bx} = V_{Ax}$.

Приклад

Дано: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $\omega = 5$ рад./с; $r = 20$ см; $BC = 43,3$ см

Визначити: V_B , ω_{BC} - кутову швидкість ланки BC

Розв'язок

Ланки AO та BC мають обертальний рух, тому:

$$V_A = \omega \cdot r = 5 \cdot 20 = 100 \text{ см/с}; \quad V_B = \omega_{BC} \cdot BC.$$

За теоремою $V_{Bx} = V_{Ax}$, тобто:

$$\begin{aligned} V_B &= V_{Bx} = \omega_{BC} \cdot BC = V_{Ax} = \\ &= V_A \cos 30^\circ = 100 \cdot 0,866 = \\ &86,6 \text{ см/с}, \end{aligned}$$

звідки

$$\omega_{BC} = \frac{V_{Ax}}{BC} = \frac{86,6}{43,3} = 2 \text{ рад./с.}$$

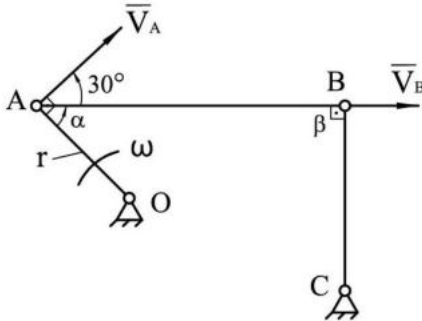


Рис.8

2.4.4. Миттєвий центр швидкостей

Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) плоскої фігури – точка, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю.

Доведемо існування МЦШ (рис.9).

Визначимо положення МЦШ за швидкістю даної точки та кутової швидкості фігури. Відкладаємо по прямій, яка повернена на кут 90° в напрямку ω :

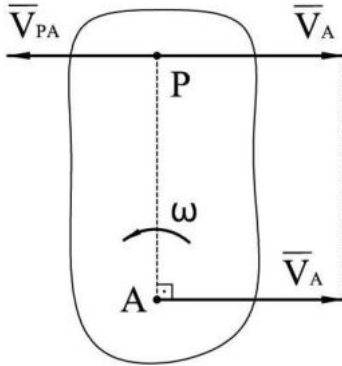


Рис.9

$$AP = \frac{V_A}{\omega}.$$

Приймаємо точку A за полюс.
Тоді

$$\begin{cases} \bar{V}_P = \bar{V}_A + \bar{V}_{PA}; \\ V_{PA} = \omega \cdot AP = \omega \cdot \frac{V_A}{\omega} = V_A, \end{cases}$$

звідки $V_P = V_A - V_{PA} = 0$, тобто точка P - МЦШ.

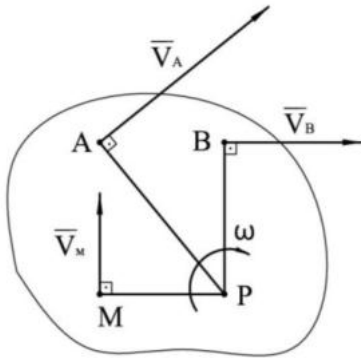


Рис.10

Розглянемо розподіл швидкостей точок плоскої фігури (рис.10). За МЦШ та кутовою швидкістю ω можна обчислити швидкість будь-якої точки

$$\bar{V}_B = \bar{V}_P + \bar{V}_{BP}.$$

Враховуючи, що $\bar{V}_P = 0$ при МЦШ в точці P , маємо:
 $\bar{V}_B = \bar{V}_{BP}$; $V_B = V_{BP} = \omega \cdot BP$;
 $\bar{V}_B = \bar{V}_{BP} \perp BP$.

Аналогічно для точок A та M :

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{AP}; V_A = \omega \cdot AP; \bar{V}_A \perp AP; \bar{V}_M = \bar{V}_{MP} \text{ та } \bar{V}_M \perp MP.$$

Висновок: швидкість будь-якої точки плоскої фігури в кожний момент часу дорівнює добутку кутової швидкості фігури на довжину відрізка, який з'єднує точку з МЦШ, та спрямована перпендикулярно цьому відрізку в напрямку обертання фігури.

Тоді залежності між швидкостями точок плоскої фігури в даний момент часу мають вид

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP}, \quad \frac{V_M}{V_B} = \frac{MP}{BP} \text{ та далі,}$$

тобто модулі швидкостей точок плоскої фігури в кожний момент часу пропорційні відстаням від цих точок до МЦШ, якби плоска фігура оберталась навколо МЦШ. Відрізки AP , BP та MP , які з'єднують МЦШ з точками, де визначають швидкості, називають миттєвими

радіусами обертання.

Розглядаємо загальний випадок визначення положення МЦШ (рис.11): МЦШ знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених з двох точок фігури до векторів швидкостей цих точок.

Вочевидь, що
$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}.$$

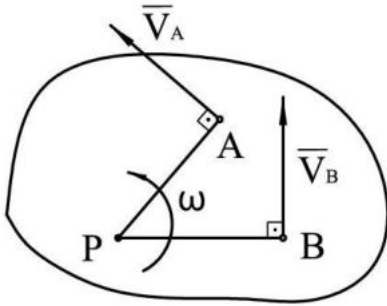


Рис.11

Окремі випадки визначення положення МЦШ.

1. $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$ та $\alpha \neq 90^\circ$ (рис.12); за теоремою про проєкції швидкостей $V_A \cos \alpha = V_B \cos \alpha \Rightarrow V_A = V_B.$

Далі
$$\begin{cases} \bar{V}_B = \bar{V}_A + \bar{V}_{BA}; \\ V_{BA} = \omega \cdot AB = 0, \end{cases}$$

отже, $\omega = 0.$

Аналогічно $\bar{V}_A = \bar{V}_M$, тобто маємо розподіл швидкостей, як при поступальному русі. Такий стан тіла називають миттєво - поступальним (наприклад, шатун AB на рис.13).

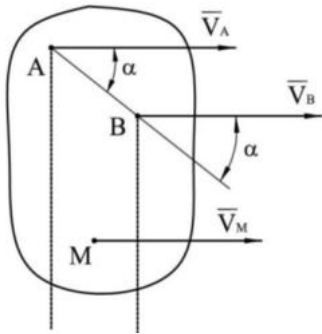


Рис.12

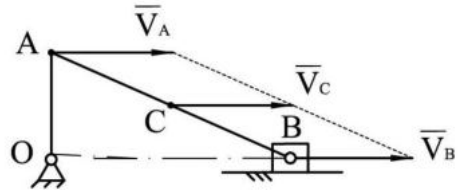


Рис.13

2. $\bar{V}_A \parallel \bar{V}_B$ та $\alpha = 90^\circ$, тобто $\bar{V}_A \perp AB$ та $\bar{V}_B \perp AB$ (рис.14, a);

звичайний підхід не застосовується, але при $V_B \neq V_A$ МЦШ знаходиться на перетині AB та CD з урахуванням пропорційності швидкостей миттєвим радіусам обертання $\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$ при $\Delta APC \sim \Delta BPD.$

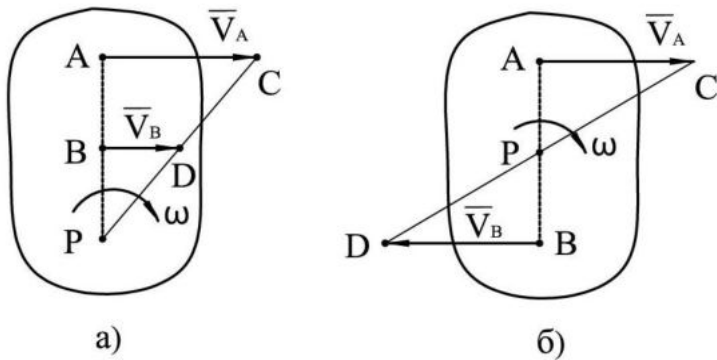


Рис.14

3. Рух плоскої фігури, наприклад котка, який котиться без ковзання по деякій нерухомій лінії. В цьому випадку МЦШ знаходиться в точці дотику котка з лінією, оскільки при відсутності ковзання швидкість точки дотику плоскої фігури по відношенню до нерухомої кривої дорівнює нулю.

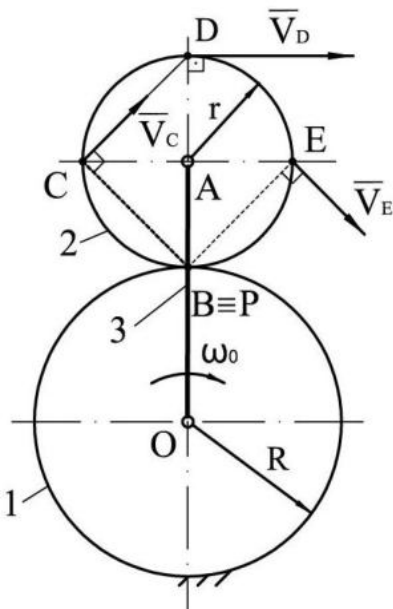


Рис.15

Приклад

Дано: $\omega_0 = 2,5 \text{ рад/с}$; $R = 15 \text{ см}$;
 $r = 5 \text{ см}$

Визначити: $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_C, \vec{V}_D, \vec{V}_E$

Розв'язок

Визначаємо швидкість точки A , яка належить кривошипу OA , що має обертальний рух:

$$V_A = \omega_0 \cdot (R + r) = 2,5(15 + 5) = 50 \text{ см/с}$$

напрямок $\vec{V}_A \perp AO$ за ходом дугової стрілки ω_0 .

Рухомий коток перекочується по зовнішній поверхні нерухомого диску без ковзання, тобто має плоско-паралельний рух та МЦШ в точці $B \equiv P$, тобто $V_B = 0$.

Оскільки коток вільно насаджений на кінець A кривошипу OA , то

кутова швидкість обертання котка навколо осі, що проходить через точку A :

$$\omega = \frac{V_A}{r} = \frac{50}{5} = 10 \text{ рад/с.}$$

З'єднаємо точки C , D та E з МЦШ та визначаємо відповідні миттєві радіуси обертання

$$CP = EP = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \text{ см, } DP = 2r = 2 \cdot 5 = 10 \text{ см.}$$

$$\text{Модулі швидкостей точок } V_C = V_E = \omega \cdot CP = 10 \cdot 5\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \text{ см/с;}$$

$$V_D = \omega \cdot DP = 10 \cdot 10 = 100 \text{ см/с.}$$

Напрямки векторів: $\vec{V}_C \perp CP$, $\vec{V}_D \perp DP$, $\vec{V}_E \perp EP$ в напрямку дугової стрілки кутової швидкості ω .

Таким чином, при визначенні швидкостей точок плоскої фігури в теоретичній механіці застосовують три методи:

- 1) за теоремою про додавання швидкостей;
- 2) за теоремою про проекції швидкостей на ось;
- 3) з використанням МЦШ.

2.4.5. Прискорення точок твердого тіла при його плоско-паралельному русі

Для визначення прискорень точок тіла при його плоско-паралельному русі переважно застосовується теорема про додавання прискорень при складному русі точки.

Складний плоский рух розкладається на два простих:

а) переносний поступальний рух разом з довільно вибраним полюсом;

б) відносний обертальний рух навколо цього полюса.

У відповідності до теореми про додавання прискорень в окремому випадку, коли $\omega_e = 0$, тобто переносний рух не є обертальним та $\vec{a}_c = 0$, маємо:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

У відповідності до плоского руху (рис.16):

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau.$$

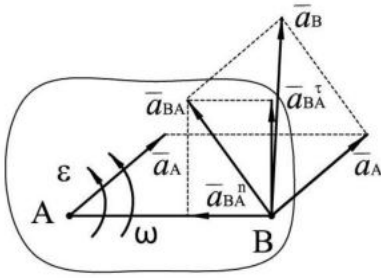


Рис.16

Висновок: прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорень полюса та прискорення цієї точки при її обертанні разом з плоскою фігурою навколо полюса.

Розглядаємо визначення величини та напрямку відносного прискорення. Відносним є обертальний рух плоскої фігури разом з точкою, тому нормальна складова прискорення має модуль $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$ та напрямок $\overline{a_{BA}^n}$ - по радіусу AB до центру A . Для дотичної складової прискорення модуль $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB$ та напрямок $\overline{a_{BA}^\tau} \perp AB$ в напрямку дугової стрілки кутового прискорення ε .

Повне відносне прискорення має модуль:

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^n)^2 + (a_{BA}^\tau)^2} = AB \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

та напрямок $\alpha = \arctg \frac{a_{BA}^\tau}{a_{BA}^n} = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$, де $\angle \alpha = (\overline{AB}, \overline{a_{BA}})$.

Приклад

Дано: $r = AO = 5$ см; $\omega_0 = 10$ рад/с; $l = AB = 50$ см; $\angle OAB = 90^\circ$; $\angle ABx = 45^\circ$

Визначити: ω , V_B , ε та a_B .

Розв'язок

Визначаємо швидкість точки A кривошипу AO , що обертається навколо точки O з кутовою швидкістю ω_0 :

$$V_A = \omega_0 \cdot AO = 10 \cdot 5 = 50 \text{ см/с.}$$

Шатун AB має плоско-паралельний рух з МЦШ в точці P , яка

знаходиться на перетині AP та BP при $AP \perp \bar{V}_A$ та $BP \perp \bar{V}_B$.

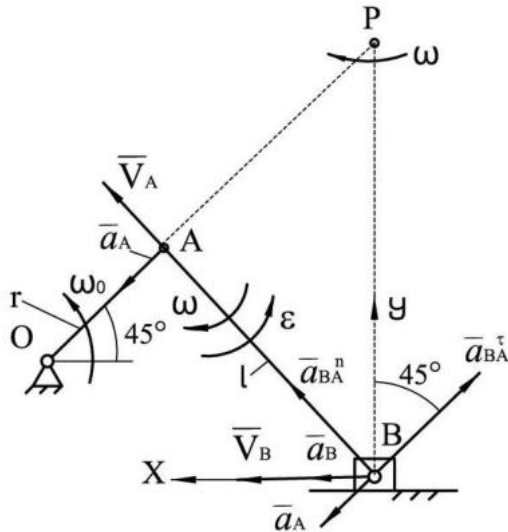


Рис.17

Напрямок дугової стрілки ω - за векторами \bar{V}_A та \bar{V}_B .

Тоді $\omega = \frac{V_A}{AB} = \frac{50}{50} = 1$ рад/с та швидкість точки B :

$$V_B = \omega \cdot BP = 1 \cdot \sqrt{AB^2 + AP^2} = 1 \cdot 50\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \text{ м/с.}$$

Визначаємо прискорення точки B за допомогою векторного рівняння

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau.$$

В рівнянні дві невідомі: \bar{a}_B - за модулем (напрямок - \bar{a}_B вздовж осі x); \bar{a}_{BA}^τ - за модулем (напрямок - $\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$).

Попередньо обчислюємо $a_A = a_A^n = \omega_0^2 \cdot AO = 10^2 \cdot 5 = 500 \text{ см/с}^2$ та $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB = 1^2 \cdot 50 = 50 \text{ см/с}^2$.

Праву та ліву частину векторного рівняння проектуємо на осі:

$$\text{на } x: a_B = a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ - a_{BA}^\tau \cos 45^\circ; \quad (1)$$

$$\text{на } y: 0 = -a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ + a_{BA}^\tau \cos 45^\circ. \quad (2)$$

З рівняння (2): $a_{BA}^\tau = a_A - a_{BA}^n = 500 - 50 = 450 \text{ см/с}^2$, звідки

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{450}{50} = 9 \text{ рад/с}^2.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$, то попередньо вибраний напрямок дугової стрілки ε на рисунку не змінюється.

З рівняння (1):

$$a_B = (a_A + a_{BA}^n - a_{BA}^\tau) \cos 45^\circ = (500 + 50 - 450) \cos 45^\circ = 50\sqrt{2} \text{ см/с}^2.$$

Оскільки $a_B > 0$, то попередньо вибраний напрямок \bar{a}_B вздовж осі x на рисунку не змінюється.

2.4.6. Миттєвий центр прискорень

Миттєвий центр прискорень (МЦП) плоскої фігури – точка P , абсолютне прискорення якої в даний момент часу дорівнює нулю.

1.

Доказ існування МЦП (рис.18)

За заданим \bar{a}_A , ω та ε :

1) проведемо під кутом α до вектора \bar{a}_A пряму в напрямку дугової стрілки ε , причому $\alpha = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

2) відкладемо відрізок:

$$AP = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

3) знайдемо прискорення точки P :

$$\bar{a}_P = \bar{a}_A + \bar{a}_{PA}.$$

$$\text{Далі } \begin{cases} \bar{a}_{PA} = \bar{a}_{PA}^n + \bar{a}_{PA}^\tau; \\ a_{PA}^n = \omega^2 \cdot AP; \\ a_{PA}^\tau = \varepsilon \cdot AP. \end{cases} \Rightarrow$$

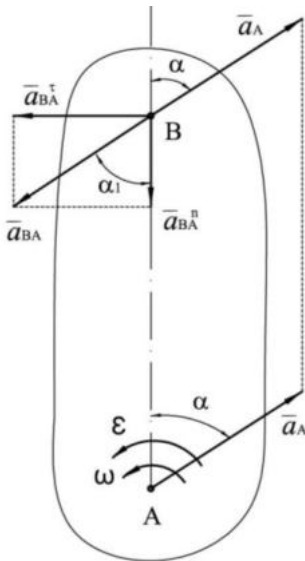


Рис.18

$$a_{\Pi A} = \sqrt{(a_{\Pi A}^n)^2 + (a_{\Pi A}^\tau)^2} = A\Pi\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{a_{\Pi A}^\tau}{a_{\Pi A}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha_1 = \alpha.$$

Таким чином, $\bar{a}_{\Pi A} = -\bar{a}_A \Rightarrow \bar{a}_{\Pi} = 0$, тобто точка Π - МЦП.

Розглянемо розподіл прискорень точок плоскої фігури. За векторним рівнянням прискорень $\bar{a}_B = \bar{a}_{\Pi} + \bar{a}_{B\Pi} = \bar{a}_{B\Pi}^n + \bar{a}_{B\Pi}^\tau$, де $\bar{a}_{\Pi} = 0$ як для МЦП. Тоді $a_B = a_{B\Pi} = B\Pi\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Аналогічно для точки M : $a_M = a_{M\Pi} = M\Pi\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, при тому ж $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$.

Таким чином, залежності між прискореннями точок плоскої фігури в даний момент часу

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{A\Pi}{B\Pi}, \quad \frac{a_M}{a_B} = \frac{M\Pi}{B\Pi} \text{ та далі.}$$

Прискорення точок плоскої розподіляються так само, якби плоска фігура поверталась навколо МЦП.

Приклад

Визначити МЦШ та МЦП колеса, що котиться із сталою швидкістю (рис.19).

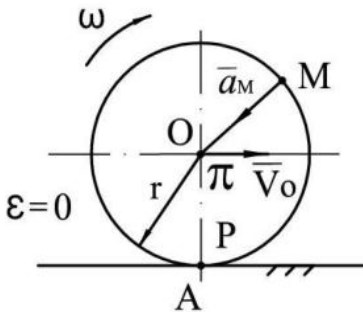


Рис.19

Розв'язок

Оскільки точка $A \equiv P$ - МЦШ, то

$$V_A = 0,$$

$$\bar{V}_O = \text{const}; \quad \bar{a}_O = 0 \Rightarrow \text{точка}$$

$O \equiv \Pi$ - МЦП.

Перевірка:

$$a_M = a_{M\Pi} = a_{M\Pi}^n = \frac{\omega^2 \cdot r}{\varepsilon} = 0.$$

Контрольні запитання

1. Дати визначення плоско-паралельного руху твердого тіла.
2. Навести приклади плоско-паралельного руху твердих тіл.
3. Записати рівняння руху плоскої фігури, яка визначає плоско-паралельний рух твердого тіла.
4. Розкладання плоско-паралельного руху твердого тіла.
5. Теорема про додавання швидкостей.
6. Теорема про проекції швидкостей двох точок.
7. Поняття миттєвого центру швидкостей.
8. Розподіл швидкостей точок плоскої фігури.
9. Загальний спосіб визначення положення миттєвого центру швидкостей.
10. Векторна сума двох прискорень точки твердого тіла при його плоскому русі.
11. Поняття миттєвого центру прискорень.
12. Розподіл прискорень точок плоскої фігури.
13. Перелічити способи визначення положення миттєвого центру прискорень.
14. Який вид має розподіл прискорень точок плоскої фігури в даний момент часу у випадках:
а) $\omega \neq 0$; $\varepsilon \neq 0$; б) $\omega \neq 0$; $\varepsilon = 0$; в) $\omega = 0$; $\varepsilon \neq 0$?
15. Як визначити прискорення точок та кутових прискорень ланок плоского механізму?

2.5. СФЕРИЧНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.5.1. Основні поняття та рівняння сферичного руху тіла

Сферичним називається такий рух твердого тіла, при якому всі його точки описують траєкторії на концентричних сферах із спільним нерухомим центром, тобто рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Приклад: сферичний шарнір кривошип.

При сферичному русі використовують термінологію з астрономії - кути Ейлера. На прикладі руху гіроскопа:

φ , z_1 - кут та ось власного обертання;

ψ , z - кут та ось прецесії; обертання власної осі z_1 навколо нерухомої z ;

θ - кут нутації (у загальному випадку змінний кут між осями

прецесії та власного обертання).

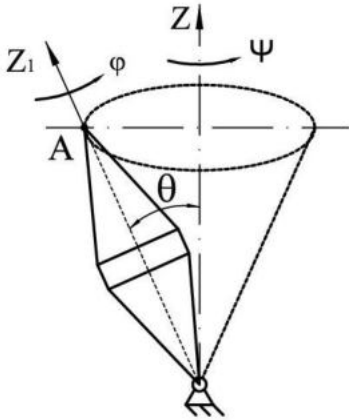


Рис.1

Три незалежних параметри визначають положення гіроскопа, оскільки гіроскоп має три ступеня вільності.

З перебігом часу кути Ейлера змінюються за певними законами

$$\varphi = f_1(t); \psi = f_2(t); \theta = f_3(t), \quad (1)$$

які називаються рівняннями сферичного руху тіла.

Кути Ейлера та наведені рівняння дають можливість вивчати сферичний рух тіла та рух окремих його точок аналітичним методом.

Сферичний рух характеризує наступна теорема Даламбера-Ейлера:

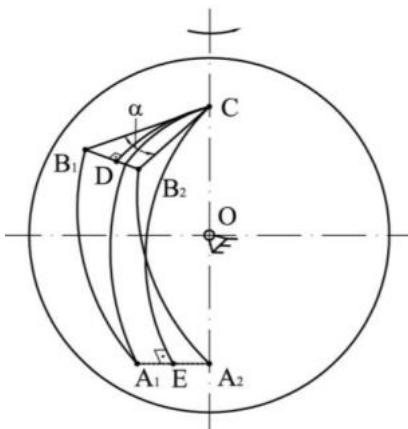


Рис.2

тверде тіло, що має одну нерухому точку, можна перемістити з одного положення в інше поворотом навколо деякої осі, що проходить через нерухому точку.

Рух тіла визначається рухом дуги AB сфери з центром в точці O (рис.2). Два положення дуги: A_1B_1 та A_2B_2 . Проведемо дуги великого радіуса A_1A_2 та B_1B_2 . З середини цих дуг D та E будемо перпендикуляри до перетину в точці C .

Трикутники $\Delta A_1B_1C = \Delta A_2B_2C$ - за рівністю трьох сторін. Поворот одного й того ж трикутника на кут α при нерухомій точці C , тоді дві нерухомі точки O та C визначають ось повороту OC .

За рис.3 OC - ось кінцевого повороту. Якщо $\Delta t \rightarrow 0$, то $A_2B_2 \rightarrow A_1B_1$ та ось OC наближається до граничного положення, до миттєвої осі обертання (MOO) - геометричного місця точок, швидкості яких у даний момент часу дорівнюють нулю.

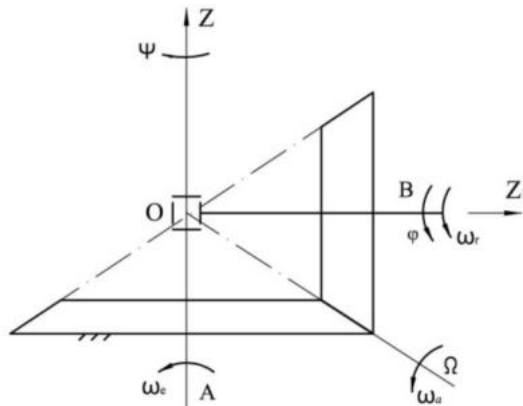


Рис.3

Геометричне місце MOO на нерухомому тілі (PA) і в нерухомому просторі (HA) називається аксоїди. Рухомий аксоїд котиться по нерухомому без ковзання (рис.4).

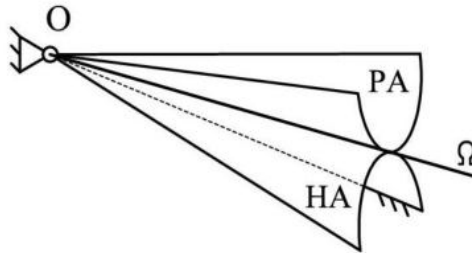


Рис.4

2.5.2. Кутова швидкість та кутове прискорення тіла при його сферичному русі

Сферичний рух твердого тіла характеризується кутовою швидкістю та кутовим прискоренням.

Середня кутова швидкість за проміжок часу Δt при повороті тіла на кут визначається як $\Delta\alpha \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega_{cp}$. Тоді кутова швидкість в даний момент часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \quad (2)$$

Таким чином, миттєва кутова швидкість тіла в даний момент часу

дорівнює першій похідній по часу від кута повороту тіла.

У випадку сферичного руху вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$ в даний момент відкладається від нерухомої точки O по миттєвій осі в той бік, щоб, дивлячись назустріч цьому вектору, бачити обертання тіла проти руху годинникової стрілки.

Розглядаємо складний рух точки M при куті нутації $\theta = const$ (рис.5)

$$\begin{aligned} \bar{V}_a &= \bar{V}_e + \bar{V}_r = (\bar{\omega}_e \times \bar{r}) + (\bar{\omega}_r \times \bar{r}) = \\ &= (\bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r) \times \bar{r}. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\bar{V}_a = \bar{\omega}_a \times \bar{r} \Rightarrow \bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r. \quad (3)$$

Теорема: абсолютна кутова швидкість тіла при його сферичному русі дорівнює векторній сумі кутових швидкостей переносного та відносного рухів.

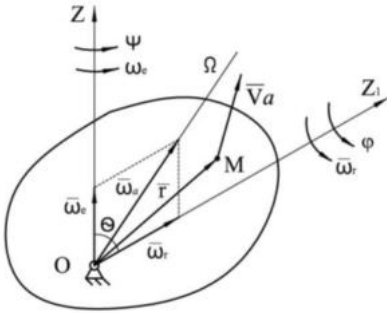


Рис.5

Інше визначення - за правилом паралелограма кутових швидкостей: абсолютна кутова швидкість тіла при його сферичному русі за модулем на напрямком визначається діагонально паралелограма, побудованого на векторах переносної та відносної кутових швидкостей.

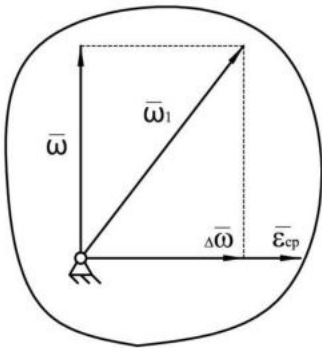


Рис.6

При сферичному русі тіла положення MOO з перебігом часу змінюється, а відповідно змінюється не тільки модуль, але і напрямком вектора кутової швидкості (рис.6):

$$\Delta \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega},$$

$\frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \bar{\varepsilon}_{cp}$ - середнє кутове прискорення за проміжок часу Δt .

Тоді кутове прискорення в даний момент часу:

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (4)$$

Таким чином, вектор кутового прискорення дорівнює векторній похідній по часу від вектора кутової швидкості.

Побудуємо годограф вектора кутової швидкості (рис.7): відкладаємо від нерухомої точки O вектори кутової швидкості, які відповідають ряду послідовних моментів часу, та з'єднуємо кінці цих векторів.

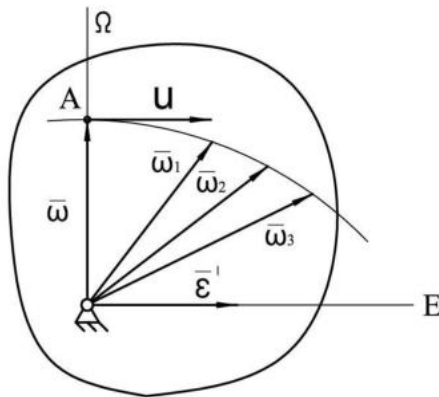


Рис.7

Швидкість \bar{u} руху точки A - кінця вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$ - по годографу в будь-який момент часу:

$$\bar{u} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \quad (5)$$

де $\bar{\omega}$ - радіус-вектор точки.

Оскільки вектори $\bar{\varepsilon}$ та \bar{u} геометрично дорівнюють одній і тій же величині, то:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{u}, \quad (6)$$

тобто кутове прискорення тіла при його сферичному русі дорівнює лінійній швидкості кінця вектора кутової швидкості.

Вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$, який геометрично дорівнює швидкості \bar{u} , відкладається від нерухомої точки.

Пряма, по якій спрямований вектор кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$, називається віссю кутового прискорення та позначається E .

2.5.3. Швидкості точок твердого тіла при його сферичному русі

Розглядаємо розподіл швидкостей точок твердого тіла при його сферичному русі (рис.8).

Швидкості точок твердого тіла при цьому русі в кожний момент часу визначаються як їх обертальні швидкості при обертанні навколо миттєвої осі Ω . При визначеному положенні MOO та заданій кутовій швидкості тіла, швидкість будь-якої його точки:

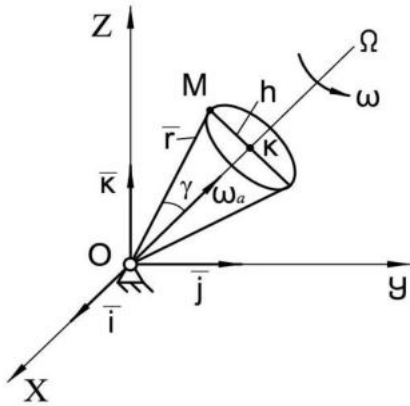


Рис.8

Таким чином, розподіл швидкостей точок тіла в даний момент часу при сферичному русі по відношенню до миттєвої осі обертання не відрізняється від розподілу швидкостей при обертанні тіла навколо нерухомої осі.

Виконаємо розкладання вектора швидкості точки по координатним осям. Векторне рівняння швидкості $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ представляємо у формі визначника векторного добутку:

$$\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Розкриваємо матрицю та отримуємо:

$$\vec{V} = (\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y)\vec{i} - (\omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z)\vec{j} + (\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x)\vec{k}.$$

Інакше

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}. \quad (8)$$

Тоді проєкції та модуль швидкості – за формулами:

$$\begin{cases} V_x = \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y; \\ V_y = \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z; \\ V_z = \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x. \end{cases} \quad (9)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (10)$$

Для точок *МОО* вектори \vec{r} та $\vec{\omega}$ збігаються, а їх проєкції

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (7)$$

де \vec{r} - радіус-вектор точки, який проведений з нерухомої точки *O*. Модуль швидкості точки:

$$V = \omega \cdot r \sin \gamma = \omega \cdot h,$$

де $h = MK$ - миттєвий радіус обертання (відстань від точки до *МОО*).

пропорційні, тобто:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z} = \frac{r}{\omega}. \quad (11)$$

Рівняння (11) називають рівнянням миттєвої осі обертання. Його також можна отримати з системи рівнянь проекцій швидкостей при $V = 0$.

2.5.4. Прискорення точок твердого тіла при його сферичному русі

Для визначення прискорення будь-якої точки тіла при його сферичному русі використовуємо векторний вираз швидкості цієї точки виду:

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

Тоді
$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Враховуючи, що $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \underline{\varepsilon}$ та $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$, маємо $\bar{a} = \underline{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{V}$

або

$$\bar{a} = \underline{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (12)$$

Остаточо
$$\bar{a} = \bar{a}_{об} + \bar{a}_{дог}. \quad (13)$$

Теорема: прискорення будь-якої точки твердого тіла при його сферичному русі визначається як векторна сума її обертального та до осевого прискорень.

Вектор обертального прискорення точки $\bar{a}_{об} = \underline{\varepsilon} \times \bar{r}$ спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через вектор кутового прискорення $\underline{\varepsilon}$ та радіус-вектор точки \bar{r} , в той бік, звідки поворот вектора $\underline{\varepsilon}$ до вектора \bar{r} на менший кут видно проти ходу годинникової стрілки (рис.9).

Модуль $a_{об} = \varepsilon \cdot r \sin(\underline{\varepsilon}, \bar{r}) = \varepsilon \cdot r \sin \gamma = \varepsilon \cdot h_1$, де $h_1 = MK_1$ - відстань від точки M до осі кутового прискорення E .

Вектор доосевого прискорення точки $\bar{a}_{дог} = \bar{\omega} \times \bar{V}$ спрямований перпендикулярно векторам кутової швидкості $\bar{\omega}$ та лінійної швидкості точки \bar{V} , тобто по перпендикуляру, який проведено з точки

M на миттєву ось Ω , в тому напрямку, звідки поворот вектора $\bar{\omega}$, умовно відкладеному в точці M , до вектора \bar{V} на менший кут видно проти ходу годинникової стрілки.

Модуль $a_{\partial b} = \omega \cdot V \cdot \sin 90^\circ = \omega \cdot V = \omega^2 \cdot h$,

де $h = MK$ - найкоротша відстань від точки M до миттєвої осі Ω .

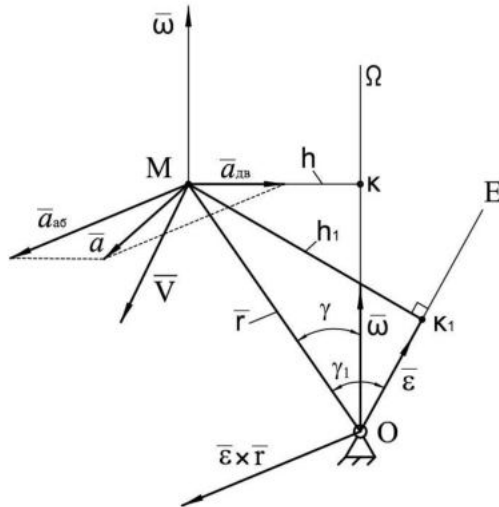


Рис.9

Модуль прискорення. Окремий випадок. Модуль прискорення точки як діагональ паралелограма прискорень:

$$a = \sqrt{a_{ob}^2 + a_{\partial b}^2 + 2a_{ob} \cdot a_{\partial b} \cos(\bar{a}_{ob}, \bar{a}_{\partial b})}$$

При сферичному русі тіла, так само як і при обертанні навколо нерухомої осі, до осьове прискорення точки $\bar{a}_{\partial b}$ спрямоване за перпендикуляром, проведеним з точки на ось обертання (миттєву ось Ω).

Обертальне прискорення точки при сферичному русі тіла \bar{a}_{ob} визначається відносно осі кутового прискорення E та направлено перпендикулярно площині, яка проходить через вектор кутового прискорення $\bar{\epsilon}$ та \bar{r} (перпендикулярно h_1), тобто $\bar{a}_{ob} \perp \bar{\epsilon}$ та $\bar{a}_{ob} \perp h_1$. Відповідно, напрямок \bar{a}_{ob} не співпадає з напрямком

швидкості \bar{V} .

Обертальне $\bar{a}_{об}$ та до осьове $\bar{a}_{\partial\theta}$ прискорення точки при сферичному русі не треба плутати з її дотичним \bar{a}_{τ} та нормальним \bar{a}_n прискореннями. Проте в окремому випадку при збіганні осей Ω та E (обертання навколо нерухомої осі) $\bar{a}_{об}$ перетворюється в \bar{a}_{τ} , а $\bar{a}_{\partial\theta}$ - в \bar{a}_n .

Контрольні запитання

1. Дати визначення сферичного руху твердого тіла.
2. Перелічити кути Ейлера.
3. Записати рівняння сферичного руху тіла.
4. Сформулювати теорему Даламбера-Ейлера про переміщення твердого тіла, яке має одну нерухому точку.
5. Чому дорівнюють швидкості точок, які розміщені на миттєвій осі обертання?
6. Напрямок вектора кутової швидкості тіла при його сферичному русі.
7. Теорема про додавання кутових швидкостей.
8. Розподіл швидкостей точок тіла при його сферичному русі.
9. Рівняння миттєвої вісі обертання тіла при його сферичному русі.
10. Теорема Рівальса.
11. Модуль прискорення точки тіла при його сферичному русі.
12. Визначення модуля прискорення точки тіла при його сферичному русі, якщо вісі кутової швидкості та кутового прискорення співпадають.
13. Чому напрямки векторів кутового прискорення та кутової швидкості тіла при сферичному русі не співпадають?
14. Які модулі та напрямки мають складові прискорення точок тіла при сферичному русі?
15. Чому напрямки векторів колової швидкості та обертального прискорення при сферичному русі тіла не співпадають?

2.6. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

2.6.1. Додавання поступальних рухів тіла

Складним називається такий рух тіла, при якому тіло одночасно бере участь в двох або більше рухах.

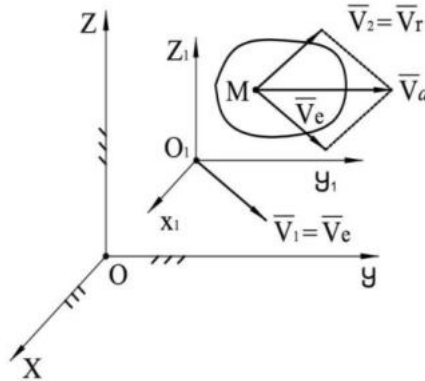


Рис. 1

Задача аналогічна постановці при складному русу окремої точки.

Тіло рухається відносно системи $O_1x_1y_1z_1$, яка сама рухається відносно нерухомих осей $Oxyz$.

Приклад: рух літака на палубі авіаносця.

Основні типи задач:

- додавання двох поступальних рухів;
- додавання двох обертальних рухів;
- додавання поступального та обертального рухів;
- загальний випадок руху твердого тіла.

Розглянемо додавання поступальних рухів. Позначаємо переносну $\vec{V}_1 = \vec{V}_e$ та відносну $\vec{V}_2 = \vec{V}_r$ швидкості тіла в поступальних рухах.

Для будь-якої точки тіла у відповідності до теореми про додавання швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

а стосовно випадку з двома поступальними рухами тіла для всіх його точок

$$\vec{V}_a = \vec{V}_1 + \vec{V}_2. \quad (1)$$

Висновок: якщо переносний та відносний рухи твердого тіла є

поступальними, то його абсолютний рух теж буде поступальним, причому швидкість цього поступального руху дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей.

2.6.2. Додавання двох обертальних рухів тіла

Обертання навколо паралельних осей в одному напрямку (рис.2).

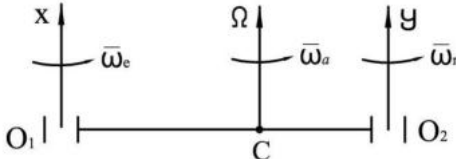


Рис.2

Використовуємо теорему про додавання швидкостей:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Вибираємо точку \$C\$ колеса, для якої абсолютна швидкість \$V_a = 0\$:

$$V_a = V_e - V_r = \omega_e \cdot O_1C - \omega_r \cdot CO_2 = 0$$

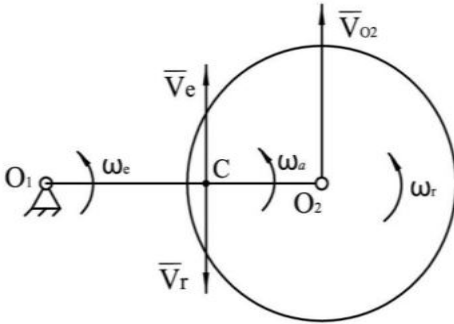


Рис.3

Звідки

$$\omega_e \cdot O_1C = \omega_r \cdot CO_2 \Rightarrow \frac{O_1C}{CO_2} = \frac{\omega_r}{\omega_e},$$

тобто \$\Omega\$ - миттєва ось абсолютного обертання, яка проходить через миттєвий центр швидкостей \$C \equiv P\$.

Таким чином, миттєва ось \$\Omega\$ абсолютного обертання лежить в площині, яка проходить через ось переносного та відносного обертання, та паралельною їм, ділить відстань між цими осями на частини, які обернено пропорційні кутовим швидкостям.

Визначаємо параметри вектору абсолютної кутової швидкості. У відповідності до \$V_{O_2} = \omega_a \cdot CO_2 = \omega_e \cdot O_1O_2\$ визначається модуль, а напрямок вектору \$\bar{\omega}_a\$ - за формулою:

$$\omega_a = \frac{\omega_e \cdot O_1O_2}{CO_2} = \frac{\omega_e(O_1C + CO_2)}{CO_2} = \frac{\omega_r \cdot CO_2 + \omega_e \cdot CO_2}{CO_2} = \omega_r + \omega_e.$$

Висновок: кутова швидкість абсолютного обертання тіла дорівнює сумі модулів кутових швидкостей складових обертання.

Тоді маємо:

- а) абсолютний рух – обертальний;
- б) положення миттєвої осі обертання;
- в) напрямок та модуль абсолютної кутової швидкості $\bar{\omega}_a$.

Обертання навколо паралельних осей в протилежних напрямках (рис.4).

Випадок, коли точка C колеса знаходиться поза відрізком O_1O_2 :

при $\omega_2 > \omega_1$ маємо: $V_C = V_e - V_r = \omega_e \cdot O_1C - \omega_r \cdot CO_2 = 0$,

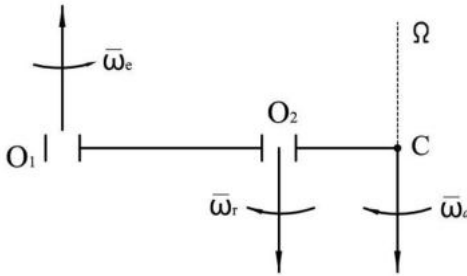


Рис.4

звідки напрямок $\bar{\omega}_a$

$$\omega_e \cdot O_1C = \omega_r \cdot CO_2 \Rightarrow MOO.$$

Таким чином, миттєва ось Ω абсолютного обертання паралельна осям переносного та відносного обертань та лежить в площині, яка проходить через ці осі, з боку тієї осі, кутова швидкість обертання навколо якої більше.

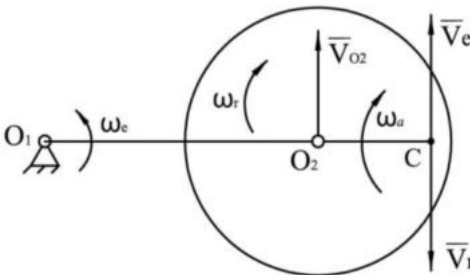


Рис.5

Відстані між віссю абсолютного обертання та осями переносного та відносного обертань обернено пропорційні кутовим швидкостям.

Визначаємо ω_a :

$$V_{O2} = \omega_a \cdot CO_2 = \omega_e \cdot O_1O_2 \Rightarrow$$

в напрямку більшої кутової швидкості.

Модуль:

$$\omega_a = \frac{\omega_e \cdot O_1O_2}{CO_2} = \frac{\omega_e (O_1C - CO_2)}{CO_2} = \frac{\omega_r \cdot CO_2 - \omega_e \cdot CO_2}{CO_2} = \omega_r - \omega_e.$$

Висновок: модуль кутової швидкості абсолютного обертання тіла дорівнює різниці модулів кутових швидкостей складових обертань.

Пара обертання (рис.6). Випадок, коли переносне та відносне обертання спрямовані в різних напрямках, а модулі їх кутових швидкостей рівні.

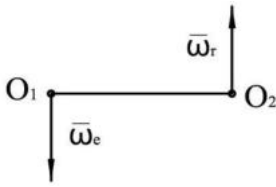


Рис.6

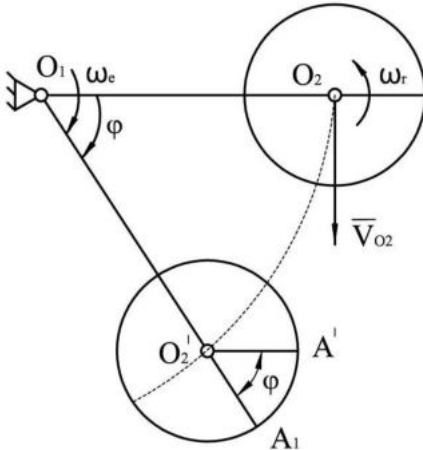


Рис.7

Задаємо $\omega_e = \omega_r \Rightarrow \omega_r = -\omega_e$, тобто маємо пару кутових швидкостей.

Тоді

$$\varphi = \omega_e \cdot t = \omega_r \cdot t \quad \text{та}$$

$$\varphi = \angle O_2 O_1 A_1 = \angle A' O_2' A_1.$$

Модуль швидкості цього руху як поступального, дорівнює добутку модуля кутової швидкості переносного руху на відстань між осями обертання

$$V_{O_1} = \omega_e \cdot O_1 O_2.$$

Вектор швидкості \bar{V} спрямований перпендикулярно площині пари кутових швидкостей $\bar{\omega}_e$ та $\bar{\omega}_r$ в тому напрямку, в якому спрямований вектор моменту пари сил \bar{M} відносно пари сил, тобто випадок пари кутових швидкостей аналогічний випадку пари сил.

Таким чином, вектор швидкості поступального руху тіла представляє собою момент пари кутових швидкостей.

Приклад пари кутових швидкостей: рух педалі велосипеда відносно рами.

Обертання навколо осей, які перетинаються (рис.8). Колесо здійснює сферичний рух навколо нерухомого центру O_1 . Використовуємо теорему про додавання кутових швидкостей $\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r$.

Колесо здійснює сферичний рух навколо нерухомого центру O_1 . Використовуємо теорему про додавання кутових швидкостей:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}_e + \bar{\omega}_r.$$

Висновок: абсолютна кутова швидкість дорівнює векторній сумі складових кутових прискорень.

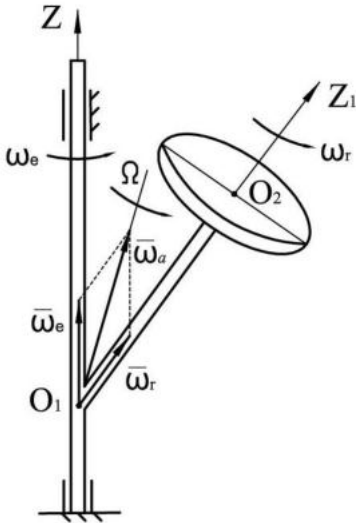


Рис.8

Напрямок миттєвої осі обертання Ω визначається діагоналю паралелограму, який будується на векторах переносної та відносної кутових швидкостей. Необхідно відзначити аналогію з задачами статки про додавання сил. Кутові швидкості так само, як і паралельні або збіжні сили.

Таким чином, додавання векторів кутових швидкостей, які перетинаються або паралельні, виконується так само, як додавання сил, що закономірно, оскільки вектори кутових прискорень та сил є ковзними векторами.

2.6.3. Додавання поступального та обертального рухів тіла

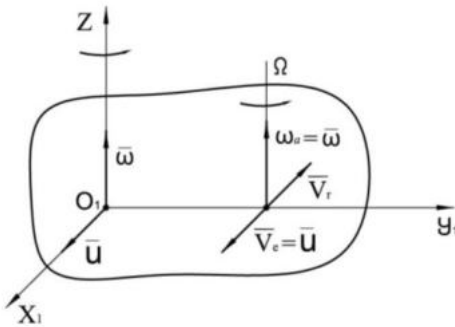


Рис.9

Вектор швидкості спрямовується перпендикулярно до вектора кутової швидкості.

Використовуємо теорему про додавання швидкостей

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r.$$

Вибираємо точку C тіла, для якої абсолютна швидкість $V_a = 0$:

$$V_a = V_e - V_r = u - \omega \cdot O_1C = 0,$$

звідки $O_1C = \frac{u}{\omega}$, тобто Ω - миттєва ось обертання.

Визначаємо параметри $\bar{\omega}_a$:

а) напрямок вектора $V_{C1} = \omega_a \cdot O_1C = u$;

б) модуль $\omega_a = \frac{u}{O_1C} = u : \frac{u}{\omega} = \omega$.

Приклад руху - турбіна теплоходу. Гвинтовий рух тіла - випадок, коли вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ та лінійної швидкості \bar{u} спрямовані вздовж однієї прямої.

Параметром кінематичного гвинта є $p = \frac{u}{\omega}$, де $u = \frac{dS}{dt}$ та $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Звичайно $p = \frac{dS}{d\varphi}$ та $dS = p \cdot d\varphi$. Враховуючи, що $p = const$, маємо

$$S = p \cdot \varphi \text{ та } p = \frac{S}{\varphi}.$$

Якщо $\varphi = 2\pi$ та $S = h$, маємо $h = 2\pi \cdot p$ - крок кінематичного гвинта. Вектори $\bar{\omega}$ та \bar{u} перетинаються під будь-яким кутом (рис.10).

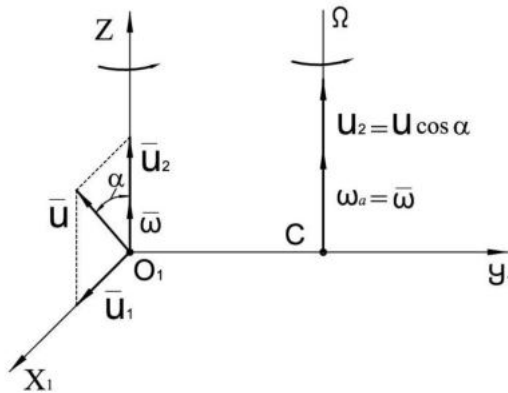


Рис.10

Використовуємо теорему про додавання швидкостей виду:

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2,$$

де $u_1 = u \sin \alpha$, $u_2 = u \cos \alpha$, причому \bar{u}_1 та $\bar{\omega}$ зводяться до одного обертання:

$$\bar{\omega}_a = \bar{\omega}; O_1C = \frac{u_1}{\omega} = \frac{u \sin \alpha}{\omega}.$$

Вектори $\bar{\omega}_a$ та \bar{u}_1 дають гвинтовий рух навколо миттєвої

гвинтової осі з параметром $p = \frac{u_2}{\omega_a} = \frac{u \cos \alpha}{\omega}$.

2.6.4. Загальний випадок руху твердого тіла

Загальним випадком руху твердого тіла є рух вільного тіла, тобто складний просторовий рух.

Виконаємо розкладання руху (рис.11) на поступальний та сферичний рухи. Розглядаємо ось власного обертання z_2 та дві системи координат:

нерухому $x_2y_2z_2O$ та рухому $x_1y_1z_1A$. Складний рух представляємо двома складовими рухами:

а) переносним поступальним рухом разом з осями $x_1y_1z_1A$ з полюсом в точці A ;

б) відносним сферичним рухом навколо полюса A .

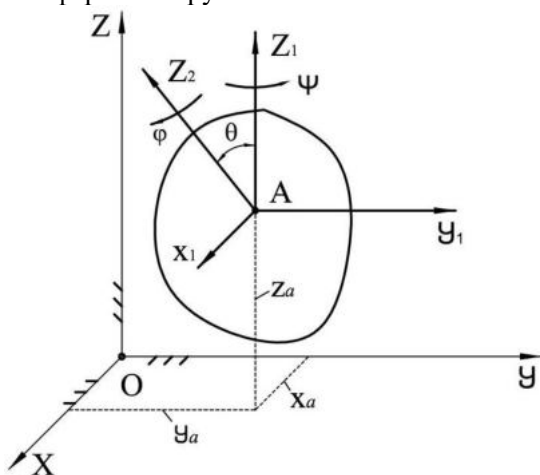


Рис.11

Записуємо рівняння руху вільного твердого тіла виду:

$$\begin{cases} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ z_A = f_3(t); \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \varphi = f_4(t); \\ \psi = f_5(t); \\ \theta = f_6(t). \end{cases}$$

Перші три рівняння визначають положення полюса A в переносному поступальному русі відносно нерухомої системи

координат $xzyO$, інші три рівняння – визначають переносний сферичний рух тіла разом з осями $x_1y_1z_1A$.

Оскільки у загальному випадку рух тіла визначають шість незалежних параметрів, то тіло має шість степенів свободи.

Розглядаємо розподіл швидкостей точок вільного тіла.

У відповідності до теореми про додавання швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r,$$

маємо:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_1.$$

Висновок: швидкість твердого тіла при його вільному русі дорівнює векторній сумі швидкості полюса та швидкості точки в її сферичному русі навколо полюса.

Теорема Рівальса для вільного тіла (рис.13).

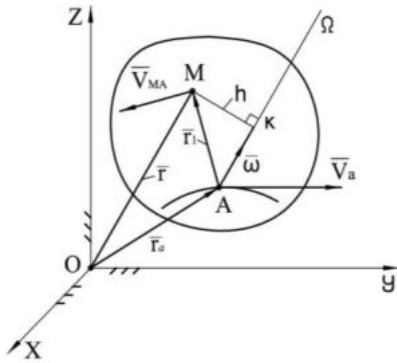


Рис.12

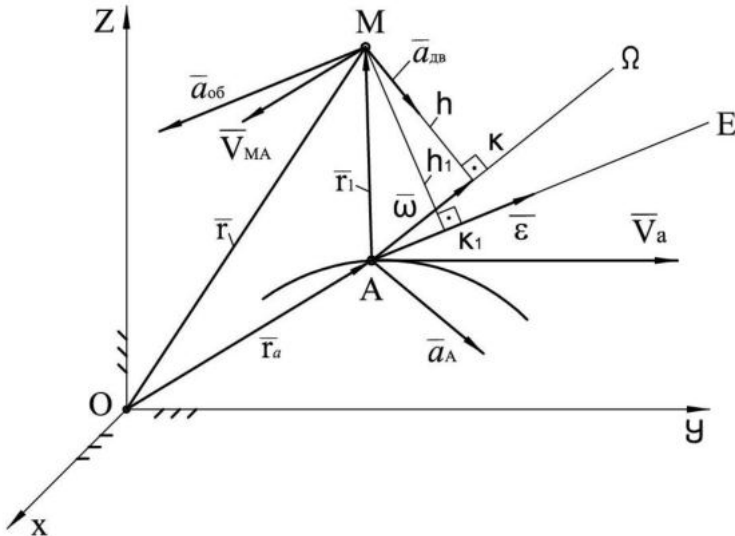


Рис.13

У відповідності до теореми про додавання прискорень:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r.$$

Враховуючи, що переносним рухом є поступальний разом з

полюсом A ,

а відносним - сферичний навколо полюса A , то

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA} + \vec{a}_{MA}$$

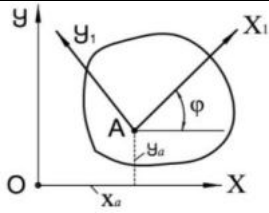
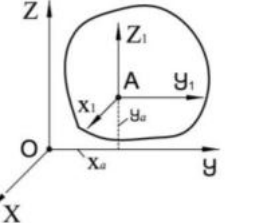
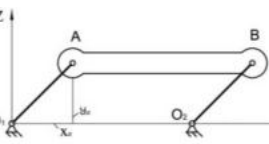
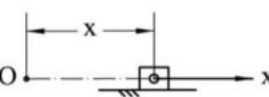
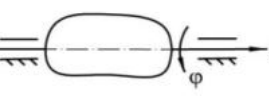
Висновок: прискорення точки вільного тіла дорівнює векторній сумі трьох прискорень: прискорення полюса в переносному поступальному русі, до осьового та обертального прискорень у відносному сферичному русі тіла навколо полюса.

2.6.5. Основні рівняння кінематики та статки твердого тіла

Основні рівняння кінематики та статки твердого тіла зведені до таблиці.

Таблиця

Вид руху тіла	H/S	Схема руху тіла	Рівняння кінематики	Рівняння рівноваги
1	2	3	4	5
Загальний випадок – вільний рух	6/0		$\left\{ \begin{aligned} x_A &= f_1(t); \\ y_A &= f_2(t); \\ z_A &= f_3(t); \\ \varphi &= f_4(t); \\ \psi &= f_5(t); \\ \theta &= f_6(t). \end{aligned} \right.$	$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} &= \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} &= \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} &= \sum Z_k = 0 \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}$
Сферичний	3/3		$\left\{ \begin{aligned} \varphi &= f_1(t); \\ \psi &= f_2(t); \\ \theta &= f_3(t). \end{aligned} \right.$	$\left. \begin{aligned} \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0 \end{aligned} \right\}$

1	2	3	4	5
Плоско-паралельний	3/3		$\left\{ \begin{array}{l} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ \varphi = f_3(t); \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \\ \sum m_O(\bar{F}_k) = 0 \end{array} \right\}$	
Просторовий поступальний	3/3		$\left\{ \begin{array}{l} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \\ z_A = f_3(t); \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \\ \sum F_{kz} = \sum Z_k = 0 \end{array} \right\}$	
Плоский поступальний	2/4		$\left\{ \begin{array}{l} x_A = f_1(t); \\ y_A = f_2(t); \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} = \sum X_k = 0; \\ \sum F_{ky} = \sum Y_k = 0; \end{array} \right\}$	
Прямолинійний поступальний	1/6		$x = f(t)$	$\sum F_{kx} = \sum X_k = 0$
Обертання навколо нерухомої осі	1/6		$\varphi = f(t)$	$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0$

Примітка. H - кількість степенів вільності твердого тіла; S - кількість обмежень, що накладаються механічними зв'язками.

Висновок: зовнішня схожість основних рівнянь статички та кінематики очевидна. В динаміці встановлюється їх внутрішній зв'язок.

Контрольні запитання

1. Дати визначення складного руху твердого тіла.
2. Додавання поступальних рухів твердого тіла.
3. Визначення абсолютної швидкості точки при додаванні поступальних рухів твердого тіла.
4. Визначення положення миттєвої вісі обертання при обертанні тіл навколо паралельних осей в одному напрямку.
5. Визначення положення миттєвої вісі обертання при обертанні тіл навколо паралельних осей в різних напрямках.
6. Визначення напрямку миттєвої вісі обертання при обертанні тіл навколо осей, які перетинаються.
7. Швидкість точки тіла при додаванні поступального та обертального рухів твердого тіла.
8. В чому полягає гвинтовий рух тіла?
9. Теорема Рівальса для вільного тіла.
10. Розподіл швидкостей точок вільного тіла.

Список літератури

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. В 3-х т. – М.: Наука, 1991. – 640 с.
2. Березин Л.М. Теоретична механіка //Л.М. Березин, С.О. Кошель: Центр навчальної літератури – 219 р., 218 с.
3. Березин Л.М. Теоретична механіка. Збірник контрольних завдань: навчальний посібник для студ. вищ. навч. закл. / Л.М. Березин, С.О. Кошель, Г.В. Кошель. – К.: КНУТД, 2012. – 379с.
4. Березин Л.М. Теоретична механіка: навч. посіб.: в 3-х т. / Л. М. Березин, С. О. Кошель, Г. В. Кошель . - К.: ЦУЛ, 2013 - .Т. 1 : Статика : збірник контрольних завдань. - 2013. - 122 с.
5. Березин Л.М. Теоретична механіка: навч. посіб.: в 3-х т. / Л. М. Березин, С. О. Кошель, Г. В. Кошель . - К.: ЦУЛ, 2014 - .Т. 2 : Кінематика : збірник контрольних завдань. - 2014. - 92 с.
6. Булгаков В., Черниш О., Яременко В. Теоретична і прикладна механіка. Частина I - К: Центр навчальної літератури, 2018. – 752 с
7. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 1998. -736с.
8. Дронг В. И. Курс теоретической механики: Учебник для вузов / В. И. Дронг, В. В. Дубинин, М. М. Ильин и др.; Под общ. ред. К. С. Колесникова. 3-е изд., стереотип. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. — 736 с.: ил. (Сер. Механика в техническом университете; Т. 1).
9. Космодемьянский А.А. Теоретическая механика и современная техника – М: изд-во URSS: 2020. – 248 с.
10. Кузьо І. В., Ванькович Т.-Н. М., Зінько Я. А., Смерека І. П.. Теоретична механіка. Кінематика.Навчальний посібник. Львів: Видавництво Львівської політехніки. – 2007. – 188 с.
11. Павленко Ю.Г. Лекции по теоретической механике. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 336с.
12. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высш. шк., 1985. – 367с.
13. Сигаев Н.П., Зимин А.И., Лукиенко Л.В., Суменков А.Л. Теоретическая механика: Учебное пособие для самостоятельной работы студентов. Часть 1 / РХТУ им. Д.И.

Менделеева, Новомосковский ин-т. - Новомосковск: 2007. - 90 с.

14. Теоретична механіка /под ред. Кузьо І. В. – Видавництво Фоліо – 2017. – 780 с.
15. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник . – К.: ЦУЛ, 2004. – 402 с.
16. Черниш О., Яременко В., Березовий М. Теоретична механіка. Навчальний посібник - К: Центр навчальної літератури, 2018. – 760 с

Навчальне видання

Березін Леонід Миколайович
Кошель Сергій Олександрович
Кошель Ганна Володимирівна
Малишев Віктор Володимирович

Теоретична механіка
Частина 1
Статика, кінематика

Навчальний посібник

Дизайн обкладинки – Бабінець Надія

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 8,2.
Наклад 1- прим. Зам. №

Виконавець і виготовлювач Університет "Україна".
03115, м. Київ, вул. Львівська, 23, тел./ф (044) 424-40-69, 424-56-26.
E-mail: ukraina.vdk@email.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №405 від 06.04.01.2001.